Elasticité (linéaire isotrope)

Exercice 1 : *Cube soumis à une pression uniforme*

Un cube en acier doux de côté $a = 5\,\text{cm}$ est soumis à une pression uniforme $p = 20\,\text{kN/cm}^2$ sur toutes ses faces. Déterminer le changement de dimension entre deux faces parallèles du cube. Vérifier le résultat obtenu à l'aide du module de compressibilité.

Exercice 2 : *Élasticité non linéaire*

Un matériau élastique non linéaire (caoutchouc) obéit à la loi (unidimensionnelle) [N/cm^2]

$$\sigma = 21\varepsilon^3 - 96\varepsilon^2 + 180\varepsilon$$

1. Établir l'expression de la densité d'énergie de déformation U_0.
2. Une éprouvette cylindrique, de $10\,\text{cm}$ de long et $0.07\,\text{cm}^2$ de section, est allongée de 0.3% ; calculer l'énergie de déformation emmagasinée dans l'éprouvette (avec l'hypothèse des petites déformations).
3. Que vaut le module d'élasticité à l'origine E_0 ?

Exercice 3 :

Démontrer que pour un matériau incompressible ($\nu = 1/2$) :

1. Les paramètres matériaux sont les suivants

$$\mu = \frac{E}{3}\,, \quad \lambda \to \infty\,, \quad K \to \infty$$

2. La loi de Hooke s'écrit :

$$\underline{\sigma} = 2\mu\,\underline{\varepsilon} + \frac{\text{tr}(\underline{\sigma})}{3}\,\mathbf{I}$$

Exercice 4 :

En considérant le champ de déplacement :

$$u_1 = kX_3X_2\,, \quad u_2 = kX_3X_1\,, \quad u_3 = k\left(X_1^2 - X_2^2\right)\,, \quad k = 10^{-4}$$

1. Déterminer les contraintes correspondantes pour un matériaux élastique linéaire isotrope en petites déformation.
2. Est-ce que cet état de contrainte vérifie les équations d'équilibre en l'absence de force volumique ?

Exercice 5 :

Soit un champ de déplacement arbitraire dépendant uniquement de la variable spatiale x_2 et du temps t. Déterminer quelles équations différentielles doit satisfaire le champ de déplacement pour que le champ de contraintes, $\underline{\sigma}$, soit admissible (en l'absence de forces de volume).

Exercice 6 : ***État de contrainte dans une plaque***

Une plaque en acier doux avec une rigidité $E = 30$ GPa et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ est chargée avec les tractions normales σ_x et σ_y. Un extensomètre est collé a la plaque avec un angle de $\phi = 30\,\text{deg}$. La traction σ_x est égale à 18 MPa et la déformation mesurée par l'extensiomètre est $\varepsilon = 407 \cdot 10^{-6}$.

1. Déterminer la déformation tangentielle maximale γ_{xy} et la contrainte tangentielle maximale τ_{xy}.
2. Que vaut la déformation tangentielle maximale γ_{yz} dans le plan yz ?
3. Dessiner le cercle de Mohr des contraintes.

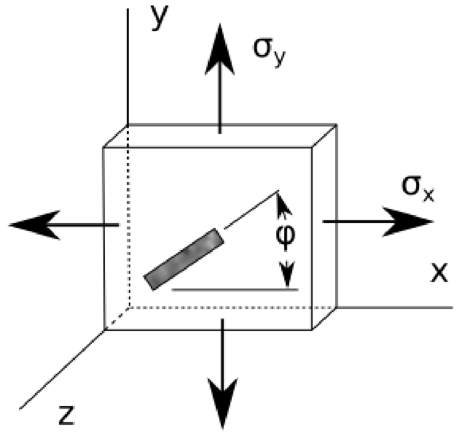

FIGURE 1 – La plaque avec un exensomètre.

Exercice 7 : ***Échauffement d'une structure (ancien sujet d'examen)***

Les trois barres verticales de la figure ci-dessous sont fixées au sol et à une poutre horizontale en haut. La poutre se comporte comme un corps rigide dont on néglige la masse. Les barres sont composées d'un matériau linéaire élastique, isotrope et homogène. Sachant que $E = 200\,\text{GPa}$, $L = 3\,\text{m}$, $A_1 = 4.0\,\text{cm}^2$, $A_2 = 2A_1$ et $\alpha = 12 \times 10^{-6}\,\text{K}^{-1}$ et en considérant un échauffement de $20\,\text{K}$ dans la barre du milieu :

Déterminer le déplacement vertical, ainsi que la déformation et l'état de contrainte dans chacune des barres.