

Préliminaires mathématiques (suite et fin)

Avant de venir en séance d'exercices :

Préliminaires :

- Finir la série 1
- Approfondir le cours de la semaine précédente avec la lecture du chapitre 2 du livre Introduction to Continuum Mechanics [Michael W. Lai, David Rubin, Erhard Kreipl] (en particulier 2.C et 2.D)

En vous aidant de tout document, répondez précisément aux questions suivantes :

1. Qu'est-ce qu'un système de coordonnées cartésiennes ?
2. Qu'est-ce qu'un système de coordonnées cylindriques ?
3. Qu'est-ce qu'un système de coordonnées sphériques ?
4. Quelles sont les expressions du gradient d'un champ scalaire en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques ?
5. Quelles sont les expressions du gradient d'un champ vectoriel en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques ?
6. Quelles sont les expressions de la divergence d'un champ vectoriel en coordonnées cartésiennes et cylindriques ?

Exercice 1 :

Calculer $\nabla(\underline{u})$ en coordonnées cylindriques pour le champ de déplacement suivant :

$$u_r = A/r^2 \text{ et } u_\theta = Br \text{ et } u_z = 0 \text{ avec } A \text{ et } B \text{ constants.}$$

Exercice 2 :

Calculer $\nabla(\underline{u})$ en coordonnées sphériques pour le champ de déplacement suivant :

$$u_r = A/r^2 + Br \text{ et } u_\theta = 0 \text{ et } u_\phi = 0 \text{ avec } A \text{ et } B \text{ constants.}$$

Exercice 3 :

Calculer $\text{div } \mathbf{T}$ en coordonnées sphériques pour le champ tensoriel suivant :

$$T_{rr} = A - \frac{2B}{r^3}, T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3}, T_{r\theta} = T_{\theta r} = T_{\theta\phi} = T_{\phi\theta} = T_{r\phi} = T_{\phi r} = 0.$$

Exercice 4 :

On considère une source de chaleur qui produit un champ de température θ défini par $\theta = 2(x^2 + y^2)$

1. Sachant que la loi de Fourier s'écrit $\underline{q} = -k\nabla(\theta)$, calculer $\underline{q}$. Notez que $\underline{q}$ est un vecteur appelé flux de chaleur, et que k est un scalaire positif appelé conductivité thermique.
2. Calculer la température au point A de coordonnées $(1, 0)$ et au point B de coordonnées $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
3. Dessiner deux isothermes de votre choix ainsi que le flux de chaleur aux points A et B.

Exercice 5 :

Le tenseur $\mathbf{T}$ s'écrit dans la base $\underline{e}_i$:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exprimer T'_{11} , T'_{12} et T'_{31} dans la base orthonormée $\underline{e}'_i$ où $\underline{e}'_1$ a la direction de $-\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$ et $\underline{e}'_2$ la direction de $\underline{e}_1$.

Exercice 6 :

Soit $\mathbf{T}$ le tenseur suivant :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la partie symétrique et antisymétrique de $\mathbf{T}$.
2. Déterminer le vecteur dual $\underline{t}^A$ de la partie anti-symétrique $\mathbf{T}^A$ de $\mathbf{T}$ (aussi appelé vecteur axial), défini tel que :

$$\mathbf{T}^A \underline{a} = \underline{t}^A \times \underline{a} \quad \forall \underline{a}$$

Indication : exprimer les composantes de $\underline{t}^A$ à partir des composantes de $\mathbf{T}^A$ en partant de $T^A_{12} = \underline{e}_1 \cdot \mathbf{T}^A \underline{e}_2$. Rappel (permutation du produit mixte) : $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$

Exercice 7 :

Soit $\mathbf{T}$ le tenseur suivant :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les trois invariants, les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{T}$.
2. Si $\underline{n}_1, \underline{n}_2$ et $\underline{n}_3$ sont les vecteurs propres, écrire $[\mathbf{T}]_{\underline{n}_i}$.
3. Est-ce que la matrice suivante représente le tenseur $\mathbf{T}$ par rapport à une base de référence arbitraire ?

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$