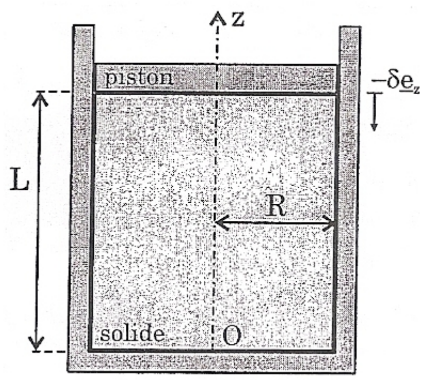
Énoncé

Exercice 1 : *Essai oedométrique*

On considère un bloc parallélépipédique d'axe Oz de section carrée, de côté $2R$ sur la surface $x - y$ et de hauteur L dans la direction z (voir figure 1). Il est placé dans un conteneur indéformable de même géométrie. Le contact entre le conteneur et le bloc est sans frottement.

Un piston indéformable, astreint à coulisser dans le conteneur, est en contact sans frottement avec la partie supérieure du bloc.

Le bloc est constitué d'un matériau thermoélastique linéaire isotrope homogène, de caractéristiques λ, μ et α. Le piston est soumis à un déplacement vertical $(-\delta \underline{e_z})$. Les forces de masse sont négligées.



Essai oedométrique.

FIGURE 1 –

1. Traduire les conditions aux limites en termes de données.
2. Le but de cette question est de calculer un champ de déplacement, qui est éventuellement solution du problème. On cherche un déplacement de la forme :

$$\underline{u}(x, y, z) = f(z)\underline{e_z} \tag{1}$$

   (a) Ecrire deux conditions sur f.
   (b) Expliciter le tenseur des petites déformations en fonction de f.
   (c) Calculer le tenseur des contraintes. Déterminer la forme de f à partir de l'équation d'équilibre.
   (d) Donner l'expression du déplacement en fonction de δ.
   (e) Vérifier que le tenseur des contraintes est admissible (i.e. qu'il satisfait les conditions aux limites).
3. La solution trouvée est-elle exacte ?
4. On donne l'expression de la force extérieure $\underline{f_{\text{ext}}}$ et du moment extérieur $\underline{m_{\text{ext}}}$ qui s'appliquent sur la face supérieure du bloc S :

$$\underline{f_{\text{ext}}} = \int_S \boldsymbol{\sigma} \underline{e_z} dS \tag{2}$$

$$\underline{m_{\text{ext}}} = \int_S \underline{OM} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \underline{e_z}) dS \tag{3}$$

   où M est un point de S. Calculer $\underline{f_{\text{ext}}}$ et $\underline{m_{\text{ext}}}$.

5. Le piston est maintenant astreint à rester fixe à la côte $z = L$. On fait subir un échauffement uniforme ΔT. Déterminer le champ de contrainte dans le bloc.

Application à la mécanique des structures

Exercice 2 : ***Étude d'une console triangulée***

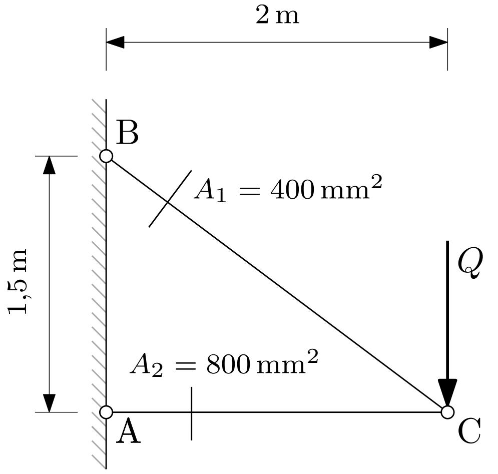


FIGURE 2 – Console triangulée.

Une console triangulée ABC (voir figure 2) est formée de deux barres en acier et est soumise à la seule charge concentrée verticale $Q = 60\,\mathrm{kN}$ au nœud C (poids propre négligé). Déterminer pour de petits déplacements

1. la contrainte normale dans chaque barre ;
2. l'allongement ou le raccourcissement de chaque barre ;
3. les composantes horizontale et verticale du déplacement du nœud C. *Indication* : au nœud C, supprimer la liaison des barres, porter les variations de longueur calculées à la question 2 et construire la position C′ du nœud en configuration déformée.

Note : il est possible d'utiliser le théorème de Pythagore généralisé (Al-Kashi) à la question 3. Soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle quelconque. Soit :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

où γ est l'angle entre a et b.

Exercice 3 : ***Étude d'une poutre soumise à une charge uniforme***

Note : Cet exercice est inspiré du cours de mécanique des structures CIVIL-238.

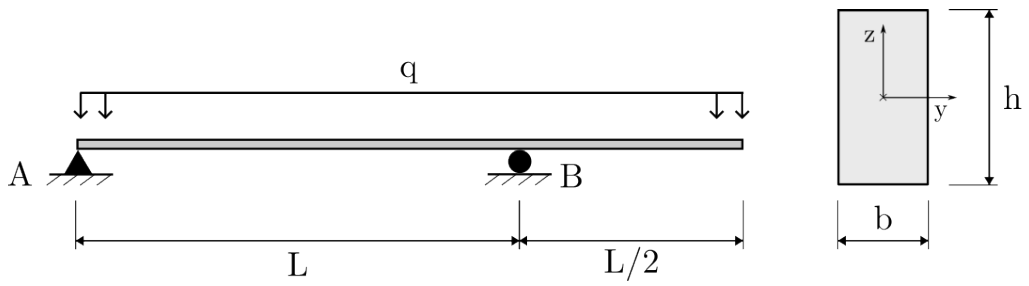


FIGURE 3 – Poutre soumise à une charge uniformément répartie et section rectangulaire de la poutre.

Une poutre est supportée par un appui fixe en A et un appui mobile en B, avec un porte-à-faux à partir de B. La longueur de la portée est de $L = 3.0$ m et celle du porte-à-faux $L/2 = 1.5$ m ($L_{\text{tot}} = 4.5$ m). Elle est soumise à une charge uniformément répartie $q = 3$ kN/m sur toute sa longueur. La section transversale de la poutre est rectangulaire avec une largeur $b = 20$ mm et une hauteur h.

1. *Rappel :* Pour une coupe de longueur infinitésimale dx de la poutre soumise à une charge uniforme q (voir Fig.4), donner l'équation générale de l'effort tranchant $V(x)$ et du moment $M(x)$.

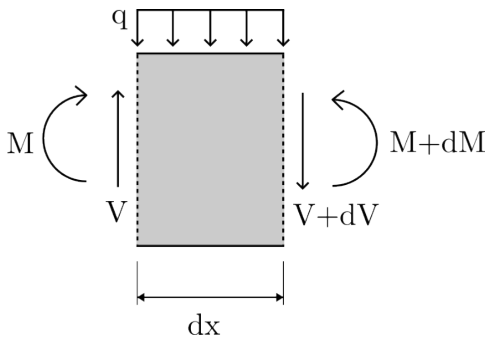


FIGURE 4 – Coupe de longueur dx de la poutre.

2. Calculer les réactions d'appuis R_A et R_B, en A et B respectivement.
3. Calculer et dessiner les diagrammes de l'effort tranchant $V(x)$ et du moment fléchissant $M(x)$. Indiquer où le moment est maximal ainsi que sa valeur.
4. Calculer le moment d'inertie I_y de la section rectangulaire.
5. La poutre est mince, on considère donc que l'effet de l'effort tranchant est négligeable par rapport à celui du moment pour l'étude de l'intégrité structurale.
   (a) Pour la section déterminante de la poutre, $M(x) = M_{\max}$, donner le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de z.
   (b) Déterminez la hauteur h de la section pour laquelle le critère de Tresca $\tau_{\max} \leq \tau_0 = 117.5$ MPa est respecté.