Préliminaires mathématiques

Exercice 1 :

On donne les tenseurs suivants :

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. Calculer B_{ii}, $B_{ij}B_{ij}$, $B_{jk}B_{kj}$, $a_m a_m$ et $B_{mn}a_m a_n$.
2. Démontrer numériquement l'équivalence entre les expressions indicielles et matricielles dans les problèmes suivants :
   (a) $b_i = B_{ij}a_j$ et $\underline{b} = \boldsymbol{B}\underline{a}$
   (b) $s = B_{ij}a_i a_j$ et $s = \underline{a}^t\boldsymbol{B}\underline{a}$

Exercice 2 :

On rappelle l'identité $\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$. L'utiliser pour montrer que :

(a) $\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jlm} = 2\delta_{ij}$
(b) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$
(c) $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$

Exercice 3 :

1. $\boldsymbol{R}$ correspond à la rotation (positive ou directe) de 90° d'un corps rigide suivant l'axe $\underline{x}_3$ (passant par l'origine). Donner l'expression de la matrice $\boldsymbol{R}$.
2. $\boldsymbol{S}$ correspond à la rotation (positive ou directe) de 90° d'un corps rigide suivant l'axe $\underline{x}_1$ (passant par l'origine). Donner l'expression de la matrice $\boldsymbol{S}$.
3. Déterminer la matrice qui correspond à la rotation effectuée à la question (1) puis à la question (2).
4. Déterminer la matrice qui correspond à la rotation effectuée à la question (2) puis à la question (1).
5. On considère un point P dont les coordonnées sont $(1, 1, 0)$. Déterminer la nouvelle position de ce point après les rotations effectuées à la question (3). Déterminer la nouvelle position de ce point après les rotations effectuées à la question (4).
6. Comment pourriez-vous déterminer l'axe et l'angle de rotation définies à la question (3) et (4).

Exercice 4 :

Soit $\boldsymbol{R}$ la matrice de rotation d'angle θ (sens trigonométrique) et d'axe de rotation $\underline{x}_3$.

1. Exprimer $\boldsymbol{R}^2$
2. Montrer que $\boldsymbol{R}^2$ correspond à une rotation d'angle 2θ autour du même axe.
3. Exprimer $\boldsymbol{R}^n$ pour tout entier n.