Exercices

Examen 2017 : Partie Théorique

Exercice 1 :

2 points

Notation indicielle / tensorielle.
Calculer :

1. $\delta_{ii}\delta_{jj}$
2. $\delta_{k1}\delta_{kj}\delta_{j1}$

   Réécrivez en utilisant la notation indicielle.
3. $x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3$
4. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

   Tenseurs.
5. Expliquer ce qu'est un tenseur d'ordre 2.
6. Expliquer ce qu'est un tenseur d'ordre 4.

Exercice 2 :

2 points

Donner la loi constitutive pour un matériau linéaire élastique isotrope en notation indicielle ($\underline{\underline{\sigma}} = f(\underline{\underline{\varepsilon}})$) et exprimer $\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$ en fonction de $\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})$ et des propriétés du matériau.

Exercice 3 :

2 points

Montrer que pour un matériau linéaire élastique isotrope les directions principales du tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont aussi les directions principales du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.

Exercice 4 :

2 points

Donner le principe du minimum de l'énergie potentielle. Quelle est son utilité ?

Exercice 5 :

2 points

Tracer les circles de Mohr pour les cas suivants :

1. $[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}$

2. $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$ où $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ et $\sigma_3 < 0$.
3. Prisme en figure 1.

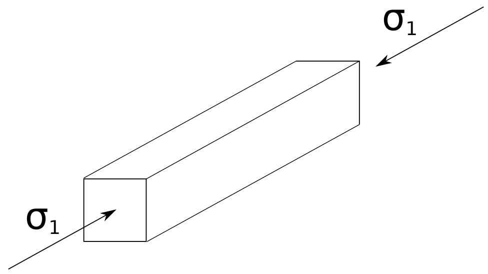

FIGURE 1 – Prisme en compression uniaxiale

Exercice 6 :

2 points

Le champ de vitesse dans un fluide est donné par :

$$\underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$$

et le champ de température par :

$$T(\underline{x}, t) = 3x_2 + x_3 t$$

Calculer le taux de changement de température.

Exercice 7 :

2 points

En utilisant les équations d'équilibre (MMC), retrouver la pression hydrostatique dans un fluide au repos (statique) en fonction de la profondeur (voir figure 2). On néglige la pression atmosphérique en $z = h$.

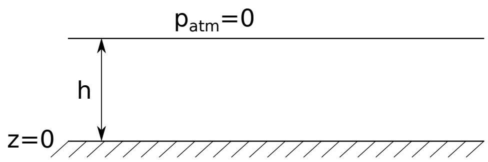

FIGURE 2 – Fluide au repos

Examen 2017 : Partie Pratique

Exercice 8 :

8 points

Une jauge de déformation est un dispositif permettant de mesurer la déformation dans une direction (la direction de la jauge). Considérez une rosette qui contient trois jauges arrangées comme sur la figure 3.

Cette rosette est collée à la surface d'un échantillon et révèle les mesures suivantes :
$\varepsilon_x = -1.\ 10^{-3}$

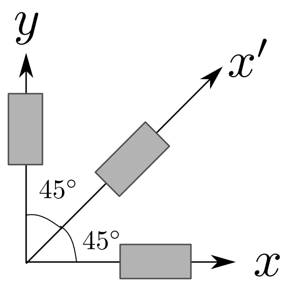

Figure 3 – Rosette

$\varepsilon_{x'} = 1.\ 10^{-3}$
$\varepsilon_y = -1.\ 10^{-3}$

Le matériau est linéaire élastique isotrope avec les propriétés matériaux suivantes : E=29kPa et ν=0.3. Considérez un état de déformations planes.

1. Trouvez la contrainte de cisaillement max à l'endroit où la rosette est collée. (4 points)
2. Obtenez les valeurs propres et vecteurs propres du tenseur des déformations. (2 points)
3. Obtenez les valeurs propres et vecteurs propres du tenseur des contraintes de Cauchy. (2 points)

Exercice 9 :

10 points

Un solide homogène a la forme d'un prisme dont la section par le plan Oxy est le triangle OAB rectangle en O, illustré sur la figure 4.

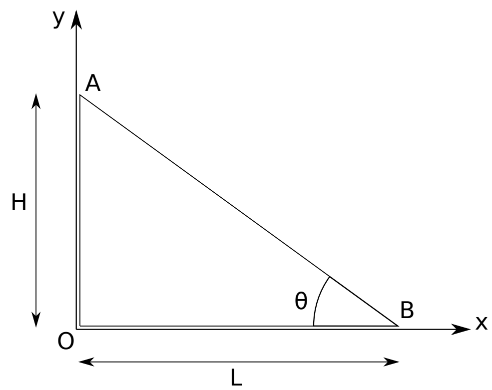

Figure 4 – Section du prisme.

Le matériau constitutif est élastique linéaire isotrope (module de Young E, coefficient de Poisson ν). L'état initial est libre de contraintes. Le problème est en déformations planes.

L'unique chargement est une distribution de forces surfaciques $\underline{T} = \gamma(y\underline{e}_x + x\underline{e}_y)$ avec $\gamma < 0$ sur le bord AB d'équation $y + x\tan\theta = H$. On dénote $\underline{n}$ la normale unitaire extérieure à AB. Les bords OA et OB sont en contact bilatéral sans frottement respectivement avec les plans d'équation $x = 0$ et $y = 0$.

1. Déterminer les fonctions $f(y)$ et $g(x)$ telles que le champ de contrainte

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} f(y) & 0 & 0 \\ 0 & g(x) & 0 \\ 0 & 0 & h(x,y) \end{pmatrix} \tag{1}$$

soit statiquement admissible. (2.5 points)

2. Montrer que la condition $\varepsilon_{zz} = 0$ fixe le choix de la fonction $h(x, y)$. (2.5 points)

3. Montrer que le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ associé au champ de contrainte issu des questions 1 et 2 est géométriquement compatible. (2.5 points)
4. Pour simplifier les calculs, on suppose dans cette question que $\nu = 0$. Après avoir déterminé les champs de déplacement associés à $\underline{\underline{\varepsilon}}$, indiquer si la méthode mise en œuvre a permis d'identifier la solution du problème. (2.5 points)

Exercice 10 :

10 points

On considère un prisme (rectangulaire parallélépipède) dont le matériau constitutif est supposé linéaire élastique isotrope de module de Young E_p et de coefficient de Poisson ν_p. La section du prisme est un carré de côté de longueur a. Aux deux bases du prisme sont situées deux plaques rigides et lisses (pas de frottement entre les plaques et le prisme). Les plaques sont liées ensemble (liaisons rigides) par quatre câbles identiques de section A_c. Les câbles sont considérés élastiques et leur module de Young vaut E_c. Avant chargement, la hauteur du prisme vaut l. Ensuite, on charge les deux faces opposées du prisme ($y = \frac{a}{2}$ et $y = \frac{-a}{2}$) avec une pression de compression p comme illustré sur la figure 5. Les faces d'équation $x = \frac{a}{2}$ et $x = \frac{-a}{2}$ restent libres.

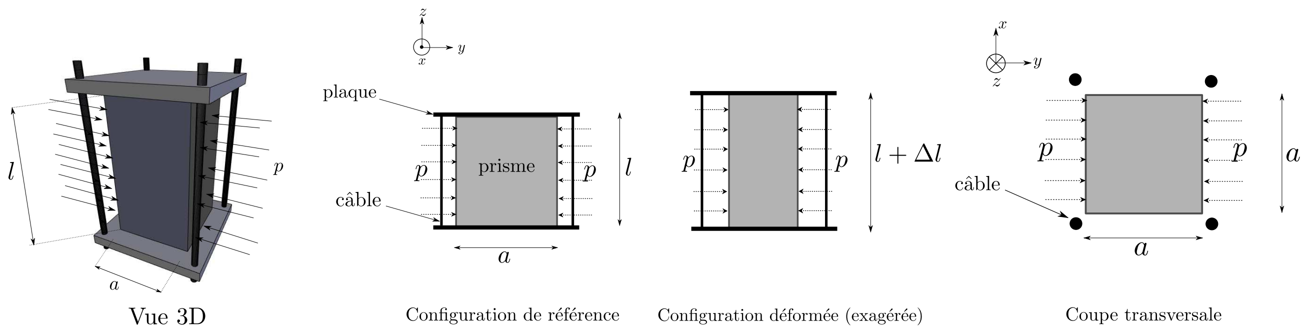

FIGURE 5 – Description du problème

1. a) Quelles composantes du tenseur des contraintes dans le prisme sont non nulles ? (2 points)
   b) En déduire les déformations dans le prisme. (2 points)
   c) Finalement, déterminer la contrainte σ_c agissant sur les câbles. (2 points)
2. Déterminer les contraintes principales dans le prisme. (2 points)
3. Calculer le module de Young effectif du prisme $E_{eff} = \frac{\sigma_{yy}}{\varepsilon_{yy}}$. Pensez-vous que E_{eff} est supérieur ou inférieur au cas où les deux plaques rigides ne peuvent pas se déplacer suivant l'axe z ? (2 points)