

Examen : Partie Théorique

Aucun document autorisé

Répondre directement sur les papiers donnés

Brouillon à disposition

45 minutes, 17 points (1/3 de la note finale)

Exercice 1 (5 points)

Sachant que :

- $\mathbf{C}$ est un tenseur d'ordre 4,
- $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des tenseurs d'ordre 2,
- $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des vecteurs,
- α et β sont des scalaires

a) Les expressions suivantes sont-elles des scalaires, des vecteurs, ou des tenseurs d'ordre 2 (2 points)?

- $\alpha (\text{div} (\text{grad} (\text{tr} (\mathbf{A}))))$
- $\text{div} (\text{rot} (\mathbf{u}))$
- $(\text{tr} (\mathbf{A})) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \otimes \mathbf{A} (\beta \mathbf{u})$

b) Valider ou invalider (en vous justifiant) les expressions suivantes (2 points) :

- $A_{ij} B_{jk} u_k = u_i A_{ik} v_k$
- $\delta_{ii} = 0$
- $v_i = B_{ij} u_j$
- $u_i + v_i = \alpha A_{ii} u_i$

c) Contracter/Simplifier (1 point) :

- $\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ki} \delta_{ll}$
- $\delta_{il} A_{ji} \delta_{jk}$

Exercice 2 (2 points)

Expliquer ce que l'on appelle les symétries mineures et majeure du tenseur d'élasticité, C_{ijkl} . D'où proviennent-elles (une réponse brève suffit, preuve non nécessaire) ?

Exercice 3 (1 point)

Sans le démontrer, d'où provient la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy ?

Exercice 4 (2 points)

Ecrire en indiciel la loi constitutive directe, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$, ainsi que la loi inverse, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$, pour les matériaux linéaires élastiques isotropes.

Exercice 5 (3 points)

Démontrer que en petites déformations le changement relatif de volume est donné par $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$.

Exercice 6 (2 points)

Soit un cube constitué d'un matériau linéaire élastique isotrope dont les arêtes sont alignées avec les axes $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, et $\mathbf{e}_3$. Les faces du cube perpendiculaires à $\mathbf{e}_1$ sont chargées en traction (contrainte de valeur P_1), les faces perpendiculaires à $\mathbf{e}_2$, sont chargées en compression (valeur P_2), et les faces perpendiculaires à $\mathbf{e}_3$, sont chargées en compression avec P_3 , avec $P_3 < P_2 < P_1$.

Expliciter les composantes du tenseur des contraintes dans le systèmes d'axes $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Tracer le tri-cercle de Mohr. Quelle est la composante de cisaillement maximale ? Sur quel plan agit-elle ?

Exercice 7 (2 point)

Pour un problème de torsion, qu'appelle-t-on fonction de gauchissement ? Quelle est son origine ? (pourquoi avons-nous du introduire cette fonction ?)