

**Examen : Partie Pratique**

*Notes de cours et exercices autorisés*

*2h, 24 points (2/3 de la note finale)*

**Exercice 1 (6 points)**

**Déformation d'un milieu continu fibreux**

On considère le mouvement d'un milieu continu renforcé par des fibres inextensibles. Les fibres sont disposées de manière orthogonales suivant les directions portées par les vecteurs unitaires  $\underline{n}_1$  et  $\underline{n}_2$ . Les fibres  $\underline{n}_1$  forment un angle  $\theta$  par rapport à  $\underline{e}_1$ . On fait l'hypothèse des déformations planes.

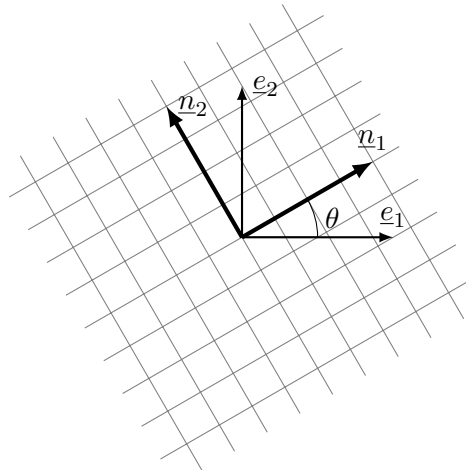


FIGURE 1 – Géométrie du problème.

1. Exprimer l'élongation suivant  $\underline{n}_1$  et  $\underline{n}_2$  en fonction de l'angle  $\theta$  et des composantes de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . Chaque fibre étant inextensible, en déduire la déformation dans ces directions. (1 point)
2. Le but est de montrer que le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est uniquement fonction de  $\varepsilon_{12}$  et de  $\theta$ .
  - (a) Déduire de la question précédente l'expression de  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$  en fonction de  $\varepsilon_{12}$  et  $\theta$ . (1 point)
  - (b) Montrer que : (1 point)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{12} \begin{bmatrix} -\tan(2\theta) & 1 \\ 1 & \tan(2\theta) \end{bmatrix}.$$

*Indications :  $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$  et  $1 - 2\sin(x)^2 = \cos(2x)$ .*

- (c) Pour ce matériau, pouvez-vous imposer une déformation  $\varepsilon_{22}$  quelconque pour un  $\varepsilon_{11}$  imposé? (0.5 point)
3. Montrer que les déformation principales sont : (1 point)

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{12}}{\cos 2\theta} \text{ et } \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_{12}}{\cos 2\theta}$$

*Indications :  $\sqrt{1 + \tan(2x)^2} = 1/\cos(2x)$ .*

4. Calculer les directions des déformations principales. Sont-elles perpendiculaires? (1,5 points)

## Exercice 2 (10 points)

### Essai de compression d'un tube cylindrique

On considère un cylindre creux à base circulaire (voir figure 2) avec hauteur  $L$ , rayon interne  $r_i$  et rayon externe  $r_e$ , soumis à une pression uniforme sur son sommet  $p_0$ . Le bas du tube est en contact sans frottement avec un support lisse. Le matériau est linéaire, élastique, homogène et isotrope avec des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Le poids propre du cylindre est négligé. Nous allons résoudre ce problème avec des coordonnées cylindriques dans un système d'axes  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta$  et  $\underline{e}_z)$  dont l'origine est en  $O$ . Un formulaire sur les coordonnées cylindriques est fourni en annexe.

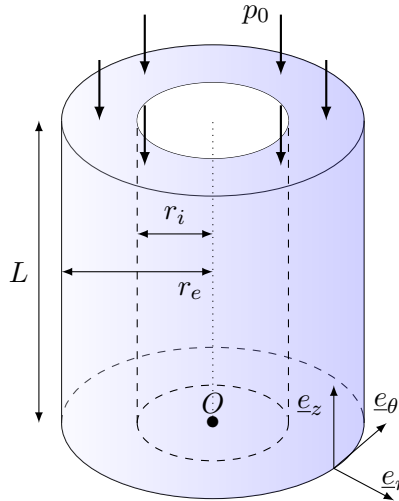


FIGURE 2 – Géométrie du problème.

1. Pouvez-vous deviner l'état de contrainte dans le solide ? (1 point)
2. Même si vous avez pu intuitiver le champ de contrainte, nous allons maintenant utiliser une approche par déplacement pour trouver la solution à ce problème. Le champ de déplacement est donné par :

$$\underline{u}(r, \theta, z) = u_r(r)\underline{e}_r + u_z(z)\underline{e}_z.$$

Ce champ satisfait-il la symétrie cylindrique ? Exprimer le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  en fonction du champs de déplacement  $\underline{u}(r, \theta, z)$ . (1 point)

3. En utilisant la loi de Hooke  $\sigma = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\mathbb{I} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}$ , donner les composantes en coordonnées cylindriques du tenseur des contraintes en fonction de  $\underline{u}(r, \theta, z)$ . (1 point)
4. Enoncer l'équation d'équilibre et montrer qu'elle mène au système d'équations suivant : (1,5 points)

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \left( \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} \right) = 0 & (1a) \\ (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 u_z}{dz^2} = 0. & (1b) \end{cases}$$

5. On peut montrer que les formes générales de  $u_r(r)$  et  $u_z(z)$  sont :

$$u_r(r) = A_1 r + \frac{A_2}{r},$$

$$u_z(z) = B_1 z + B_2.$$

Montrer que ce champ de déplacement satisfait les équations d'équilibre. (1 point)

6. On utilise maintenant les conditions aux limites pour trouver les constantes.
  - (a) Donner la condition aux limites à la base du cylindre et en déduire  $B_2$ . (0,5 point)

- (b) Donner les conditions aux limites au sommet du cylindre ( $z = L$ ) ainsi que sur les parois interne et externe du cylindre. (1 point)
- (c) Ces conditions nous permettent de calculer les constantes que l'on vous donne pour gagner du temps. On a donc :

$$A_1 = \frac{\lambda p_0}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, B_1 = -\frac{(\lambda + \mu)p_0}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{ et } A_2 = B_2 = 0.$$

Utiliser ces constantes pour calculer  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$ . Pouvez-vous exprimer  $B_1$  en fonction de  $E$ , le module de Young? Auriez-vous pu deviner ces résultats depuis le début (c.f. question 1)? (1,5 points)

7. Exprimer l'affaissement du cylindre. (0,5 point)
8. Exprimer la déformation radiale du cylindre. (0,5 point)
9. En déduire le coefficient de Poisson  $\nu$ . (0,5 point)

### Exercice 3 (8 points)

#### Barrage

On considère un barrage de section triangulaire ABC. La hauteur du barrage (BC) est  $h$  et sa largeur (AB) est  $L$ . On suppose que la surface AC du barrage est libre de contrainte et que l'eau atteint le sommet du barrage (hauteur  $h$ ). Notons également que la surface AB est encastree. On dénote par  $\rho_e$  la masse volumique de l'eau et par  $\rho_b$  celle du barrage. Le matériau du barrage est linéaire, élastique et isotrope avec pour constantes de Lamé  $\lambda$  and  $\mu$ . L'origine des axes est le point B.

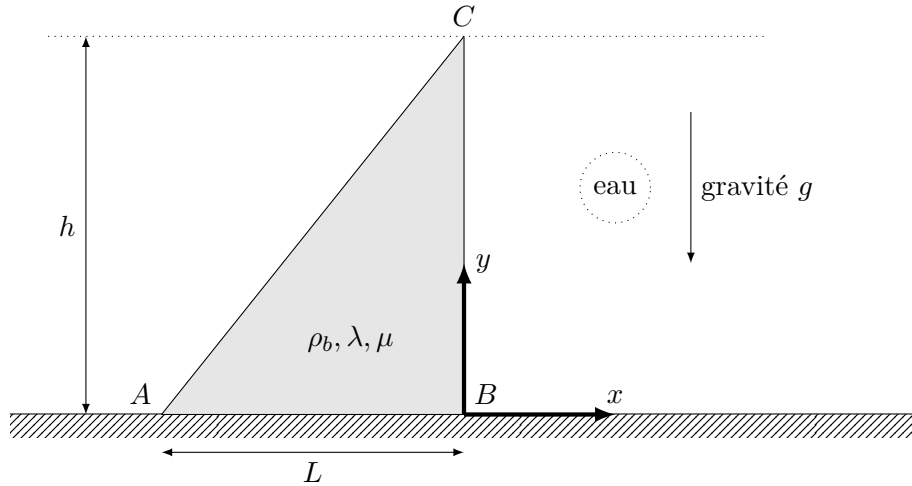


FIGURE 3 – Géométrie du problème.

Le but de cet exercice est de résoudre le problème du barrage par la méthode de la minimisation de l'énergie potentielle. On considère un champ de déplacement de la forme :

$$u_x(y) = a_1 y + b_1,$$

$$u_y(y) = a_2 y + b_2.$$

1. Donner les conditions aux limites sur les bords du barrage et en déduire  $b_1$  et  $b_2$  pour que le champ de déplacement soit cinématiquement admissible. (11 point)
2. A partir du champ de déplacement, calculer le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}$ . (1 point)

3. Nous avons vu en cours que l'énergie de déformation  $E_d$  vaut :

$$E_d = \int_V \left( \frac{1}{2} \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) dV,$$

avec  $V$  le volume. Montrer que dans notre cas l'énergie de déformation  $E_d$  vaut : *(1,5 points)*

$$E_d = \frac{Lh}{4} \left( \mu a_1^2 + (\lambda + 2\mu) a_2^2 \right).$$

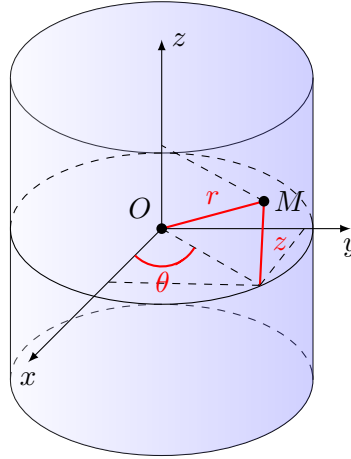
4. Calculer le travail de l'eau sur le côté BC du barrage. *(1,5 point)*  
5. On peut montrer que le travail du poids propre du barage vaut :

$$W_P = -\frac{1}{6} \rho g a_2 h^2 L.$$

Exprimer l'énergie potentielle du système en fonction des constantes du problème. *(1 point)*

6. Minimiser l'énergie potentielle du système par rapport à ces constantes pour les déterminer. *(1 point)*  
7. Proposer une stratégie pour améliorer cette solution. *(1 point)*

## Annexe : Coordonnées cylindriques



**Gradient d'un scalaire  $f$**

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_z \quad (2)$$

**Gradient d'un champ vectoriel  $\underline{v}$**

$$\nabla \underline{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)} \quad (3)$$

**Divergence d'un champ vectoriel  $\underline{v}$**

$$\text{div } \underline{v} = \text{tr}(\nabla \underline{v}) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (4)$$

**Divergence d'un tenseur  $\underline{\underline{T}}$  d'ordre 2**

$$\text{div } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)} \quad (5)$$

Remarque : l'expression précédente se simplifie quelque peu dans le cas d'un tenseur symétrique  $T_{ij} = T_{ji}$

**Laplacien d'un scalaire  $f$**

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (6)$$

**Laplacien d'un champ vectoriel  $\underline{v}$**

$$\Delta \underline{v} = \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \underline{e}_r + \left( \Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \underline{e}_\theta + (\Delta v_z) \underline{e}_z \quad (7)$$