MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS Nom: ______________________
BS - SGC - EPFL Prénom: ______________________
Lausanne, 22 janvier 2021

Examen : Partie Pratique
Notes de cours et exercices autorisés
2h, 32 points (2/3 de la note finale)

Exercice 1 (*10 points*)

Déformation d'un cube en parallélépipède

Un cube de côté L est maintenu en contact sans frottement avec des murs en $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$. Il est déformé dans les directions $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$ et $\underline{e}_z$, de sorte que les longueurs finales de ses côtés deviennent k_xL, k_yL et k_zL (voir Figure). On pose que

$$k_z = 3 - k_x - k_y - \kappa \,, \tag{1}$$

où $\kappa \ll 1$. Le volume final est alors

$$V = k_x k_y (3 - k_x - k_y - \kappa) L^3 \,. \tag{2}$$

Le cube est constitué d'un matériau homogène, linéaire et isotrope, avec un module de Young E et un coefficient de Poisson ν. On fait l'hypothèse des petites déformations.

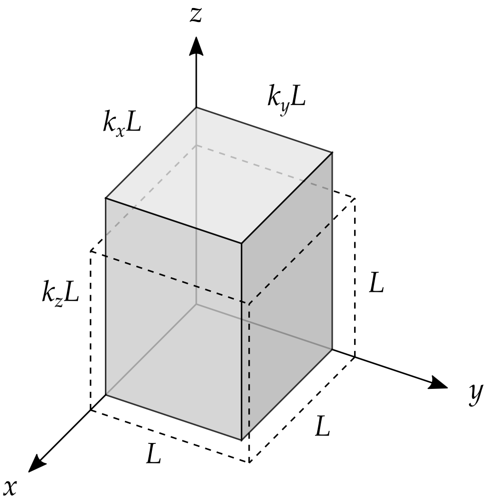

Figure 1 – Cube initial et déformé (déformations exagérées)

1. Exprimer les composantes du mouvement $x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$ en fonction des coordonnées X, Y et Z avant déformation. En déduire les déplacements u_x, u_y et u_z. *(2 points)*
2. Calculer les composantes du tenseur de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Remplacer k_z par son expression donnée dans l'équation (**??**). *(1 point)*
3. Calculer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ à partir de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, en fonction de E, ν, k_x, k_y et κ. *(2 points)*
   On rappelle que les coefficients de Lamé on pour expressions
$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \,. \tag{3}$$
4. Dans le cas général, des forces doivent être appliquées sur les faces du cube pour le maintenir dans cet état de déformation. On désire spécifiquement connaître la force à appliquer sur la face supérieure du cube.

(a) Calculer cette force en supposant que la surface supérieure garde approximativement une aire de L^2. *(1 point)*

(b) À quelle condition (sur les propriétés matériau) cette force devient-elle nulle ? *(1 point)*

(c) Que devient cette condition lorsque $\kappa = 0$? Que cela implique-t-il pour la nature du matériau et pour l'état de déformation actuel ? *(1 point)*

Pour les questions suivantes, on gardera $\kappa = 0$.

5. Calculer la déformation volumique ε_V et en déduire le changement de volume du cube. Est-il en accord avec le volume donné à l'équation (**??**) ? Si ce n'est pas le cas, comment procéder pour obtenir les mêmes résultats ? *Indication : On peut exprimer k_x en fonction de ε_{xx} et k_y en fonction de ε_{yy}. (2 points)*

Exercice 2 (*10 points*)

Minimisation de l'énergie potentielle d'une colonne soumise à son poids propre

On considère une colonne cylindrique à section constante A soumise à son poids propre considérant une masse volumique variable $\rho(x)$. La colonne est fixée à sa base qui est à l'origine de l'axe vertical. Étant donné la grande hauteur de la colonne L devant son rayon, nous choisissons de résoudre le problème 1D associé où l'inconnue est $u(x)$. La colonne est constituée d'un matériau linéaire élastique, avec un module d'élasticité E.

Dans cet exercice, nous cherchons à déterminer le déplacement vertical dû au poids propre en utilisant le principe du minimum en énergie potentielle. On considère un champ de déplacement de la forme $u(x) = ax^2 + bx + c$ et une masse volumique de la forme $\rho(x) = \rho_0(1 - \frac{x}{L})$.

examen_2021/figures/colonne.png

FIGURE 2 – Colonne à masse volumique variable (pas à l'échelle)

1. Déterminer c pour que le champ de déplacement proposé soit cinématiquement admissible. *(0.5 point)*
2. Calculer l'énergie élastique de déformation E_d. *(2 points)*
3. Calculer le travail dû au poids propre W. *(2.5 points)*
4. Déterminer a et b en minimisant l'énergie potentielle du système et exprimer le déplacement final. *(3 points)*
5. En considérant un exercice vu en classe, le champ de déplacement trouvé à la précédente question correspond-il à la solution exacte ? Un polynôme d'ordre supérieur donnera t-il la solution exacte ? Justifier. *(2 points)*

Exercice 3 (*12 points*)

Sphère creuse sous pression

On considère un réservoir sphérique creux de rayons intérieur R_i et extérieur R_e tels que $0 < R_i < R_e$ (voir Figure). Un point du réservoir est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) rapportées au système de coordonnées sphériques $(O, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)$, (voir formulaire).
Ce réservoir est en équilibre sous l'action d'une pression uniforme p_e répartie sur sa surface extérieure $r = R_e$. La surface intérieure $r = R_i$ est libre d'efforts, les efforts volumiques sont supposés négligeables et le cadre de l'hypothèse des petites perturbations est supposée valide.
Le matériau constitutif est un milieu homogène, élastique linéaire et isotrope, caractérisé par les coefficients de Lamé λ et μ.

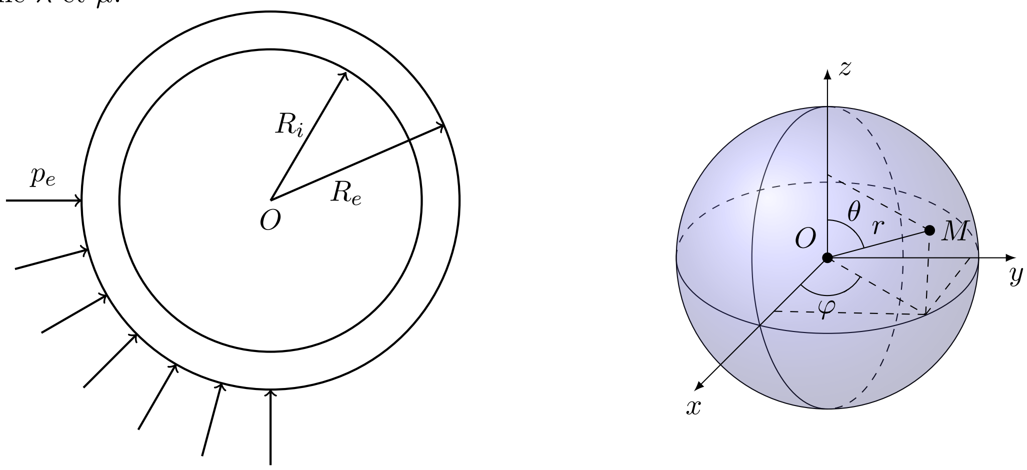

Figure 1 : Géométrie de la structure : Coupe du réservoir. Système de coordonnées sphériques.

1. Donner les conditions aux limites du problème. *(1 point)*
2. On recherche le champ de déplacement solution sous la forme :

$$\underline{u}(r) = r\, f(r)\, \underline{e}_r \tag{4}$$

   où f est une fonction scalaire qui dépend uniquement de la variable radiale r.
   Justifier ce choix. *(1.5 points)*
3. Calculer le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$. *(1.5 points)*
4. Après avoir rappelé la loi de Hooke, calculer l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$. *(1 point)*
5. Montrer que l'équation différentielle que la fonction $f(r)$ doit nécessairement satisfaire pour que les contraintes soient à l'équilibres s'exprime sous la forme

$$(\lambda + 2\mu) g(r) = 0,$$

   où g est une fonction dépendant de $f'(r)$ et de $f''(r)$. *(2 points)*
6. Montrer que la fonction

$$f(r) = a - \frac{b}{3\, r^3} \quad \text{(avec } a \text{ et } b \text{ deux scalaires)}$$

   est bien solution de l'équation différentielle trouvée dans la question précédente. *(1 point)*
7. Expliquer, sans calculer, comment peut-on déterminer les constantes a et b pour que le champ de contraintes soit solution du problème. *(1 point)*
   On montre alors (ne pas les calculer) que les composantes principales du tenseur des contraintes dans le repère de coordonnées sphériques peuvent s'écrire sous la forme

$$\sigma_{rr} = \frac{p_e\, R_e^3}{R_i^3 - R_e^3}\left[1 - \frac{R_i^3}{r^3}\right], \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_e\, R_e^3}{R_i^3 - R_e^3}\left[1 + \frac{R_i^3}{2r^3}\right].$$

8. (a) Donner le signe des contraintes principales en un point quelconque de la pièce. Représenter les cercles de Mohr et déterminer la contrainte tangentielle maximale τ_{max} en un point quelconque de la pièce. *(1 point)*

   (b) Sachant que la pièce supporte la charge tant que $\tau_{max} < \sigma_S/2$ en tout point, σ_S étant une donnée caractéristique du matériau, en quel(s) point(s) de la pièce, la rupture s'initie-t-elle en premier lieu ? *(1 point)*

   (c) Montrer que la pression p_{lim} limite supportable par la pièce est donnée par :

$$p_{lim} = \frac{2}{3}\sigma_S \left(1 - \frac{R_i^3}{R_e^3}\right).$$

   Commenter ce résultat. *(1 point)*

Formulaire en coordonnées sphériques

Gradient d'une fonction scalaire $f(r,\theta,\varphi)$:

$$\underline{grad}\, f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta,\varphi)\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi)\underline{e}_\theta + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi)\underline{e}_\varphi$$

Tenseur gradient d'un vecteur $\underline{v}(r,\theta,\varphi) = v_r\,\underline{e}_r + v_\theta\,\underline{e}_\theta + v_\varphi\,\underline{e}_\varphi$

$$\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi\right) \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \dfrac{v_\varphi}{\tan\theta}\right) \\ \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{v_\theta}{\tan\theta} + v_r\right) \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_\varphi)}$$

Divergence d'un vecteur :

$$div(\underline{v}) = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{\tan\theta} + v_r\right)$$

Divergence d'un tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}$, avec $\underline{\underline{T}}$ s'exprimant comme suit

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\varphi} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta\varphi} \\ T_{\varphi r} & T_{\varphi\theta} & T_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_\varphi)}$$

est

$$\underline{div}\left(\underline{\underline{T}}\right) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta}\cot\theta}{r} \\ \dfrac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{(T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi})\cot\theta + T_{r\theta} + 2T_{\theta r}}{r} \\ \dfrac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{T_{r\varphi} + 2T_{\varphi r} + (T_{\theta\varphi} + T_{\varphi\theta})\cot\theta}{r} \end{Bmatrix}_{(\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_\varphi)}$$