

Examen : Partie Pratique

Notes de cours et exercices autorisés

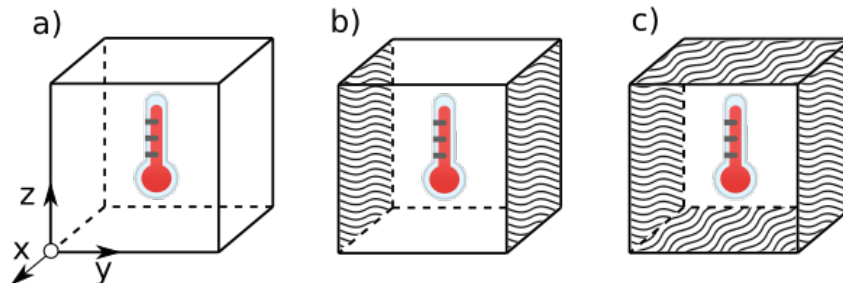
1h30, 40 points (2/3 de la note finale)

Exercice 1 (14 points)

Dilatation thermique

Un cube de matériau élastique linéaire avec un module de Young E , un coefficient de Poisson ν et un coefficient de dilatation thermique isotrope α est chauffé pour avoir une différence de température $\delta T > 0$ homogène. Trois cas sont considérés. Dans le premier cas, le cube est libre de s'étendre dans toutes les directions. Dans le deuxième cas, ses surfaces de gauche et de droite sont contraintes dans la direction y . Dans le troisième cas, le haut et le bas sont également contraints dans la direction z . En utilisant la loi de Hooke généralisée, calculez l'expansion volumétrique pour les trois cas (cas 1 : 2 points, cas 2 : 6 points, cas 3 : 5 points). Le changement de volume est-il indépendant des conditions limites ? (1 point)

Astuce : lors du calcul des composantes de déformation, commencez par calculer les contraintes dans les directions bloquées.



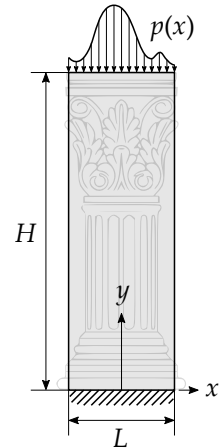
Exercice 2 (14 points)

Principe de Saint-Venant

Sur le sol repose un pilier de hauteur H et largeur L , constitué d'un matériau ayant un module de Young E et un coefficient de Poisson $\nu = 0$ (afin de simplifier les calculs). On place le centre du repère au milieu de la base du pilier. Au sommet du pilier est appliquée une pression $p(x)$ arbitraire, avec $p''(-L/2) = p''(L/2) = 0$. On souhaite déterminer le champ de déplacement dans le pilier en utilisant la méthode de minimisation de l'énergie. On suppose que le déplacement est de la forme

$$u_x(x, y) = -\frac{1}{3}cp'(x)y^3,$$

$$u_y(x, y) = a + by + (cp(x) + d)y^2.$$



L'effet du poids propre est supposé négligeable face à $p(x)$.

1. Dresser un tableau des conditions limites. Utiliser la condition en $y = 0$ pour déterminer a . (1 point)
2. Donner l'expression des coefficients de Lamé en fonction de E pour la valeur de ν donnée. Calculer les tenseurs de déformations et de contraintes (état de déformation plan). (2 points)
3. En exploitant la condition limite en $y = H$, déterminer l'expression de c et l'équation reliant b à d . (2 points)
4. Calculer le travail W de $p(x)$. L'expression pourra contenir des termes intégraux (intégrales selon x) tels que $\int p(x)$ ou $\int p^2(x)$. (3 points)
5. L'expression de l'énergie de déformation est :

$$E_d = \frac{1}{2}EHLb^2 + EH^2Lbd + \frac{2}{3}EH^3Ld^2 + \left(EH^2bc + \frac{4}{3}EH^3cd\right) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p(x) dx$$

$$+ \frac{2}{3}EH^3c^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p^2(x) dx + \frac{1}{126}EH^7c^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p''^2(x) dx.$$

Comment est calculée l'énergie potentielle du système ? Montrer que la valeur optimale de b est

$$b = -\frac{1}{EL} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p(x) dx.$$

(2 points)

6. Connaissant tous les paramètres de u_y , donner l'expression la distribution de pression de contact entre le pilier et le sol. Que représente cette valeur ? Quel effet a la forme de $p(x)$ sur cette distribution ? (2 points)
7. Toutes les conditions limites sont-elles respectées ? Qu'en est-il de l'équilibre ? Commenter le choix proposé de u_x et u_y . (2 points)

Exercice 3 (12 points)

Équilibre d'un sol

On considère un sol pesant schisteux entouré par un massif montagneux de grande rigidité **empêchant toute dilatation suivant toute direction horizontale**. La dimension suivant la verticale descendante est supposée infinie, les dimensions dans les deux autres directions sont supposées très grandes.

1. Quelles hypothèses peut-on admettre sur la forme du tenseur de déformations ? Quelle forme prend alors le tenseur des contraintes ? (3 points)
2. Calculer le tenseur des contraintes en utilisant l'équation d'équilibre. (3 points)
3. La densité du schiste est $25\,000\text{ N/m}^3$, son coefficient de Poisson est 0.2. Il se rompt quand la contrainte tangentielle atteint 400 N/cm^2 . À partir de quelle profondeur peut-on estimer que le massif schisteux est fissuré ? Dessiner le cercle de Mohr correspondant à cet état de contrainte. (3 points)
4. Donner l'expression du tenseur des contraintes dans l'épaisseur d'un sol constitué de deux matériaux de densités distinctes (voir figure ci-dessous). *Indication* : quelle condition y a-t-il à l'interface ? (3 points)



Questions 1 à 3



Question 4