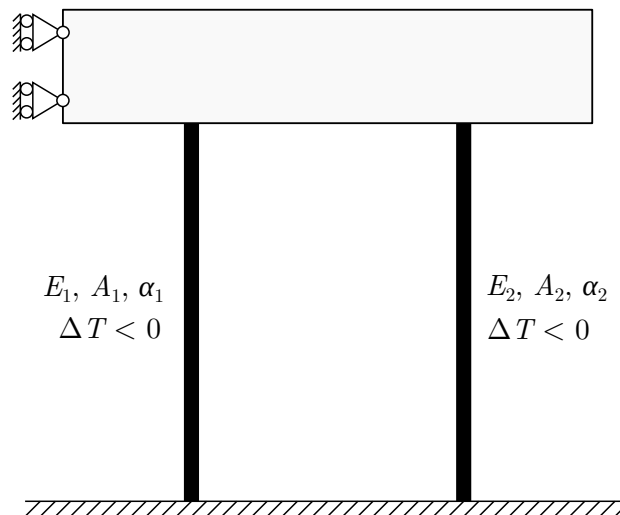


Examen : Partie Pratique
Notes de cours et exercices autorisés
 1h30, 40 points (2/3 de la note finale)

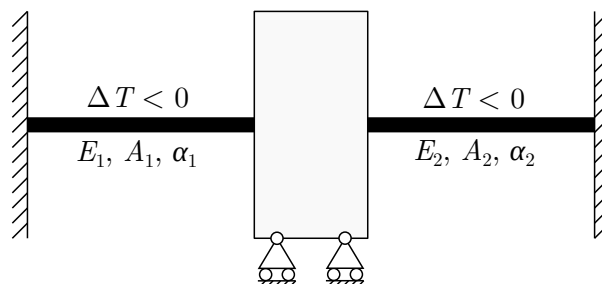
Exercice 1 (12 points)

Barres refroidies.

Deux barres verticales sont fixées au sol et à une poutre horizontale en haut (voir figure). La poutre se comporte comme un corps rigide dont on néglige la masse et est contrainte à rester horizontale. Elle se déplace verticalement sans frottement. Les barres sont composées d'un matériau élastique, homogène et isotrope. Leurs modules de Young sont E_1 et E_2 , leurs sections sont A_1 et A_2 et leurs coefficients de dilatation thermique sont α_1 et α_2 . Les barres sont soumises à un changement de température $\Delta T < 0$.



1. Écrire l'équation d'équilibre statique du système et le lien entre les déformations des deux barres. (2 points)
2. Quels sont les états de contrainte dans les barres 1 et 2? Les exprimer en fonction de ΔT , E_1 , E_2 , A_1 , A_2 , α_1 et α_2 . Que se passe-t-il à la limite où $E_2 \rightarrow 0$? Commenter. (4 points)
3. Répondre aux questions précédentes dans le cas de barres mises en série (voir figure ci-dessous). (6 points)



Exercice 2 (16 points)

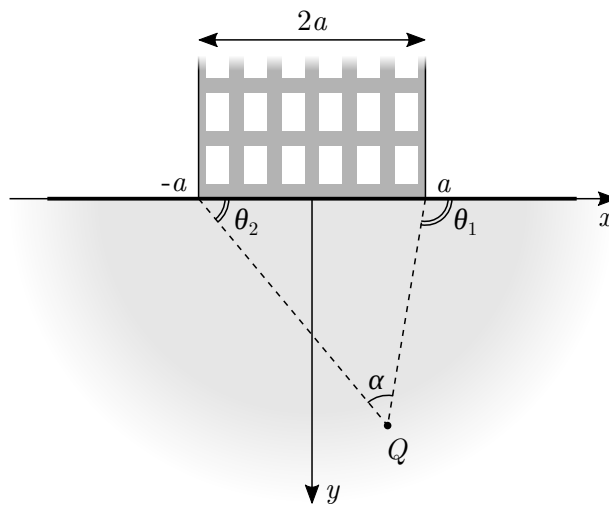
Contraintes dans le sol sous un bâtiment.

Un bâtiment de largeur $2a$ exerce une pression verticale uniforme p sur le sol. On s'intéresse aux contraintes dans le sol, que l'on suppose constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope.

La solution est connue en tout point Q (voir figure) dans le sol :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{p}{2\pi}[2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \sigma_{yy} &= -\frac{p}{2\pi}[2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \tau_{xy} &= \frac{p}{2\pi}(\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2)\end{aligned}$$

où x , y , θ_1 et θ_2 sont définis dans la figure ci-dessous.



On rappelle les relations trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned}\cos^2 a + \sin^2 a &= 1 \\ 1 - \cos 2a &= 2 \sin^2 a \\ \cos a \cos b + \sin a \sin b &= \cos(a - b)\end{aligned}$$

1. Diviser la surface du sol ($y = 0$) en trois régions. Quelles valeurs prennent θ_1 et θ_2 sur chaque région ? Vérifier que la solution satisfait les conditions aux limites à la surface du sol. (4 points)
2. Vers quelles valeurs tendent les contraintes lorsque $y \rightarrow \infty$? Commenter. (1 point)
3. Quelle est la valeur de τ_{xy} le long de l'axe y ? (Indication : exprimer la relation entre θ_1 et θ_2 lorsque $x = 0$) (1 point)
4. En déduire la valeur du cisaillement maximal $\tau_m = (\sigma_I - \sigma_{II})/2$ le long de l'axe y , où σ_I et σ_{II} sont les contraintes principales. (2 points)
5. Calculer la valeur et l'emplacement du maximum de τ_m sur l'axe y . (Indication : considérer les valeurs que peuvent prendre θ_1 ou θ_2 sur l'axe y) (2 points)
6. On considère le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$. Écrire son polynôme caractéristique puis calculer σ_I , σ_{II} et τ_m exprimés selon A , B et C . (2 points)
7. En utilisant l'expression de τ_m trouvée dans la question 6, montrer que $\tau_m = \frac{p}{\pi} \sin \alpha$ dans le sol (dans tout le milieu semi-infini), avec $\alpha = \theta_1 - \theta_2$. (2 points)
8. Pour quelle valeur de α le cisaillement maximal τ_m est-il le plus grand ? Cela est-il en accord avec la question 5 ? Tracer le lieu géométrique correspondant au τ_m maximal. (2 points)

Exercice 3 (12 points)

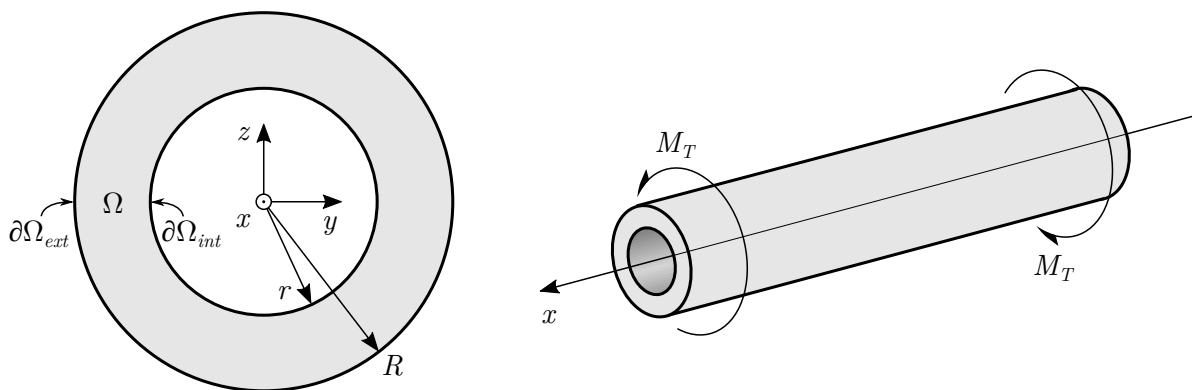
Tube circulaire en torsion.

Un tube, dont la section est montrée dans la figure ci-dessous, est soumis à un moment de torsion M_T à ses extrémités. On propose la fonction de contrainte suivante :

$$\Phi = \frac{1}{2} (R^2 - y^2 - z^2) A$$

où A est une constante.

Nous rappelons que pour la torsion, l'équilibre s'écrit $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0$ avec $\sigma_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$, $\sigma_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ et tous les autres $\sigma_{ij} = 0$.



1. Montrer que l'équation d'équilibre s'écrit $\Delta\Phi = cste$. Quelle valeur doit prendre A pour que $\Delta\Phi = -2\mu\theta'$? Vérifier que $\Phi = 0$ sur $\partial\Omega_{ext}$. Que vaut Φ sur $\partial\Omega_{int}$? (3 points)
2. Calculer le moment d'inertie J de la section sachant que

$$J = 2 \iint_{\Omega} \Phi \, dy \, dz + 2C_1 \|\Omega_1\|$$

où C_1 est la valeur de Φ sur le trou (c'est-à-dire sur $\partial\Omega_{int}$) et $\|\Omega_1\|$ est la surface du trou. (2 points)

3. Calculer les contraintes de cisaillement $\tau_{xy}(y, z)$ et $\tau_{xz}(y, z)$. Quel est le cisaillement maximal? Où se trouve-t-il? (3 points)
4. Dessiner les lignes isocontraintes de cisaillement. (1 point)
5. Comparer le tenseur des contraintes à celui d'un cylindre plein sous torsion. Pouvez-vous déduire s'il y a un gauchissement de la section? (3 points)