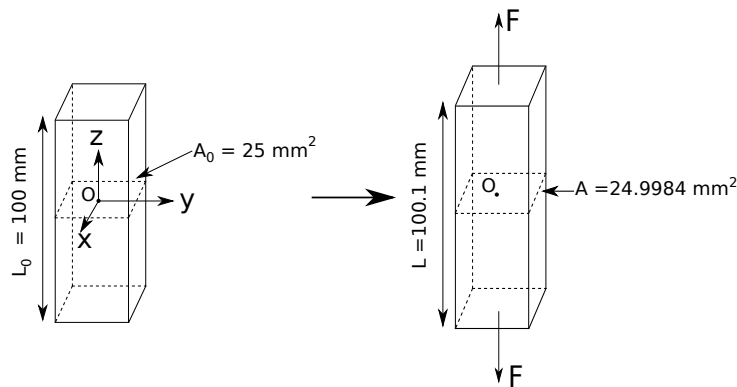


Examen : Partie Pratique
Notes de cours et exercices autorisés
1h30, 34 points (2/3 de la note finale)

Exercice 1 (10 points)

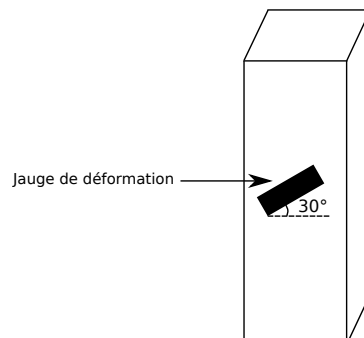
Caractérisation d'une éprouvette à l'aide d'un essai de traction.

On se propose de caractériser une éprouvette en déterminant ses caractéristiques élastiques. Pour cela, on considère une éprouvette de section initiale carré A_0 et de longueur L_0 . Ensuite, à l'aide d'une machine de traction, on applique un effort de traction $F = 5 \text{ kN}$ aux extrémités de l'éprouvette. L'éprouvette se déforme de manière homogène jusqu'à atteindre une longueur finale L et une section A (voir figure).



Il n'y a aucun mouvement de corps rigide (l'origine du système d'axes est au centre de gravité de l'éprouvette, et reste fixe suite à la déformation). Le poids propre est négligé. L'éprouvette est constituée d'un matériau isotrope homogène élastique linéaire.

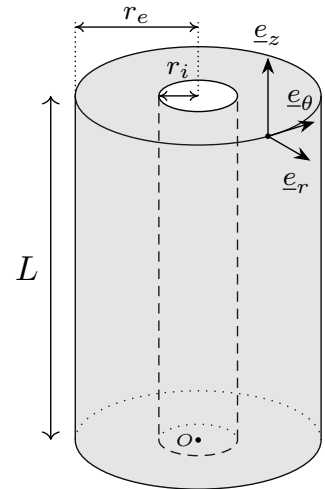
1. Expliciter avec les données géométriques du problème le champ de déplacement $\underline{u}(x, y, z)$. (2 points)
2. Déterminer les composantes du tenseur des déformations infinitésimales. (2 points)
3. Déterminer les composantes du tenseur des contraintes. (2 points)
4. Trouver le module de Young E et le module de Poisson ν . De quel matériau s'agit-il à votre avis? (2 points)
5. Durant cet essai un étudiant a placé une jauge de déformation à 30° (voir figure dessous). Il rapporte que la jauge mesure une valeur de $475 \cdot 10^{-6}$. Cette valeur est-elle correcte? (2 points)



Exercice 2 (16 points)

Cylindre creux sans cisaillement.

On considère un cylindre creux à base circulaire (voir figure) avec hauteur L , rayon interne r_i , rayon externe r_e et l'origine en O . On utilise des coordonnées cylindriques (système d'axes $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta$ et $\underline{e}_z$). Le cylindre est constitué d'un matériau isotrope homogène élastique linéaire. On néglige son poids propre.



- Pour les conditions limites suivantes

$$\underline{t} = \tau_i \underline{e}_\theta \quad \text{pour } r = r_i \quad \text{tout le long du cylindre (sur } S_{\text{int}})$$

$$\underline{t} = -\tau_e \underline{e}_\theta \quad \text{pour } r = r_e \quad \text{tout le long du cylindre (sur } S_{\text{ext}})$$

avec $\tau_e > 0$ et $\tau_i > 0$:

- Quelle relation doivent vérifier τ_i , τ_e , r_i et r_e pour que l'équilibre macroscopique soit vérifié ? (1 point)
- Expliciter quelles composantes des contraintes sont imposées par ces conditions limites. (2 points)

- Nous intuitions un champ de déplacement de la forme

$$\underline{u}(r) = f(r) \underline{e}_\theta.$$

- Quelle condition doit vérifier $f(r)$ pour que les équations d'équilibre de Navier soient satisfaites ? (3 points)

Remarque : les équations de Navier sont les équations d'équilibre écrites en fonction du champ de déplacement tel que $(\lambda + \mu)\nabla(\text{div}\underline{u}) + \mu\Delta\underline{u} = 0$. Un formulaire mathématique pour coordonnées cylindriques vous est donné.

- Vérifier que $f(r) = Ar + B/r$ (où A et B sont des constantes) est bien solution. (1 point)

- Calculez $\underline{\epsilon}$ puis $\underline{\sigma}$. (3 points)
- Expliciter les conditions aux limites en contraintes. (1 point)
- Tracer le cercle de Mohr de ce problème en un point arbitraire à l'intérieur du cylindre. (1 point)
- A quel r se trouve la contrainte de cisaillement maximale ? (1 point)
- On ajoute une traction uniaxiale en appliquant une charge sur les parties S_{sup} (en $z = L$) et S_{inf} (en $z = 0$) du cylindre :

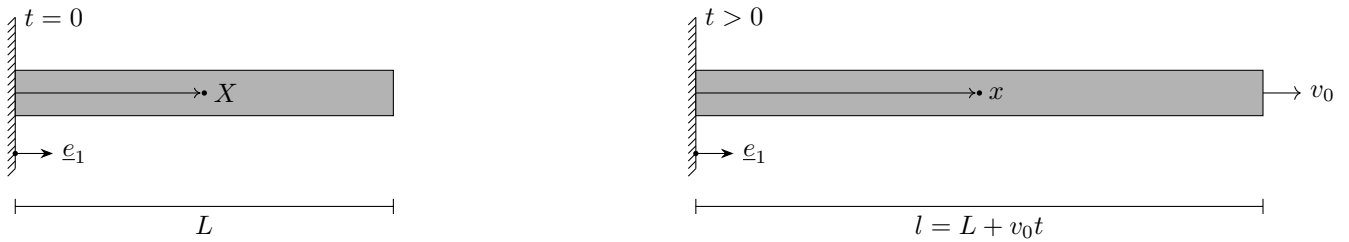
$$\underline{F} = P \underline{e}_z \quad \text{sur } S_{\text{sup}}$$

$$\underline{F} = -P \underline{e}_z \quad \text{sur } S_{\text{inf}}$$

- Quelle est le nouveau champ de contrainte ? Quel théorème avez-vous utilisé ? (2 points)
- Quelle est la contrainte de cisaillement maximale (tracer le cercle de Mohr) ? (1 point)

Exercice 3 (8 points)

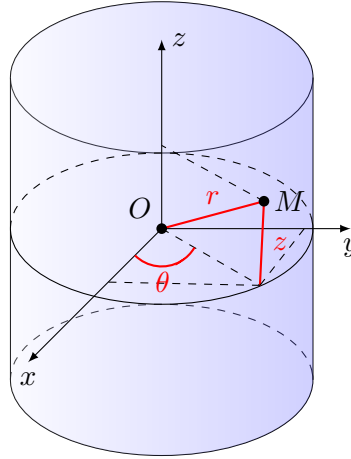
Bande en caoutchouc en grande déformation (problème traité en 1D).



Une bande homogène en caoutchouc a pour longueur initiale L . La bande est fixée à gauche (voir figure). Pour tout temps t , tel que $t > 0$, la partie droite est tirée à vitesse constante v_0 . Appelons X la position matérielle (de référence) et x la position dans la configuration déformée. Nous observons cette déformation à une position fixe de l'espace.

1. Écrivez la position horizontale x d'une particule matérielle en fonction de sa position initiale X et du temps t . (1 point)
2. Déduisez la vitesse en fonction de X (vitesse Lagrangienne), puis en fonction de x (vitesse Eulérienne). (1 point)
3. Calculez le gradient de déformation F (seulement une composante de F est non nulle ; 1D). (1 point)
4. Calculez le gradient de vitesse $\nabla \underline{v}$ où $\underline{v}$ est le vecteur vitesse. (1 point)
5. Supposez qu'une fourmi marche sur la bande en caoutchouc avec une vitesse v_1 relative à la bande. Calculez l'accélération matérielle de la fourmi en fonction du temps et de la position. (2 points)
6. Supposez que la fourmi est à $X = x = 0$ au temps $t = 0$. Quel est le temps nécessaire pour que la fourmi atteigne l'autre extrémité de la bande en fonction de L , v_0 et v_1 (étape intermédiaire : sachant que $x = FX$ montrer que $dX/dt = v_1/(1 + (v_0 t/L))$ pour la fourmi)? (2 points)

Annexe : Coordonnées cylindriques



Gradient d'un scalaire f

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_z \quad (1)$$

Gradient d'un champ vectoriel $\underline{v}$

$$\nabla \underline{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)} \quad (2)$$

Divergence d'un champ vectoriel $\underline{v}$

$$\text{div } \underline{v} = \text{tr}(\nabla \underline{v}) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3)$$

Divergence d'un tenseur $\underline{\underline{T}}$ d'ordre 2

$$\text{div } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)} \quad (4)$$

Remarque : l'expression précédente se simplifie quelque peu dans le cas d'un tenseur symétrique $T_{ij} = T_{ji}$

Laplacien d'un scalaire f

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (5)$$

Laplacien d'un champ vectoriel $\underline{v}$

$$\Delta \underline{v} = \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \underline{e}_r + \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \underline{e}_\theta + (\Delta v_z) \underline{e}_z \quad (6)$$