MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS Nom: ____________________
BS - SGC - EPFL Prénom: ____________________
Lausanne, 26 Janvier 2016

Examen : Partie Pratique
Notes de cours et exercices autorisés
1h30, 26 points (2/3 de la note finale)

Exercice 1 (***10 points***)

Soit une poutre prismatique de longueur L et de section carrée de côté a, montrée sur la figure suivante.

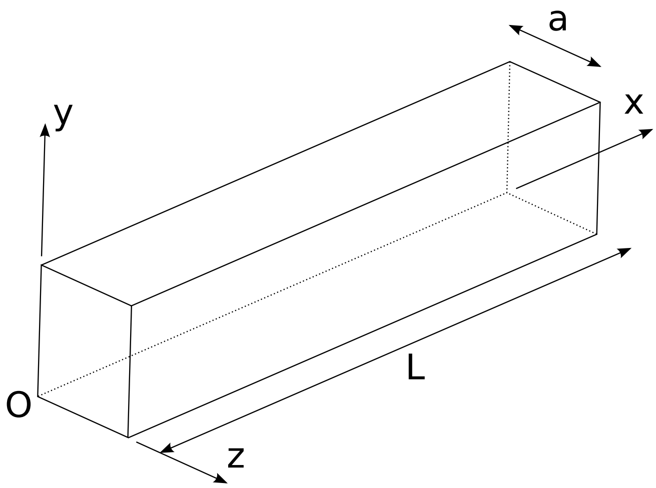

Figure 1 – Poutre

Les conditions en déplacement suivantes sont appliquées :
- $u_x = 0$ au point (0, 0, 0)
- $u_y = 0$ pour la face $y = 0$, avec contact sans frottement.
- $u_z = 0$ pour la face $z = 0$, avec contact sans frottement.

Les autres surfaces sont libres de se déplacer. Il n'y a pas de force volumique. Aucune contrainte n'est appliquée à la poutre, mais celle-ci est soumise à un champ de température de la forme :

$$\theta(x, y, z) = \gamma x$$

Avec γ une constante (unité K/m). On note E le module de Young, ν le coefficient de Poisson, ainsi que α le coefficient d'expansion thermique du matériau, dont la loi de comportement est linéaire, élastique et isotrope.

1. Donnez dans un tableau des conditions limites les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ et de $\underline{u}$ sur les faces $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $z = a$, $x = 0$ et $x = L$ de la poutre (2 points).

L'exercice peut se résoudre par la méthode des contraintes. Étant donné qu'aucune force n'est appliquée sur la structure et que les conditions d'appui permettent la dilatation thermique, on fait l'hypothèse que $\underline{\underline{\sigma}} = 0$ dans toute la poutre.

2. Énoncez l'équation d'équilibre et montrez que le $\underline{\underline{\sigma}}$ choisi la satisfait (1 point).
3. Écrivez la loi de Hooke et donnez l'expression pour le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$. Montrez que ce tenseur satisfait les conditions de compatibilité de St Venant (2 points).

4. Intégrez $\underline{\underline{\epsilon}}$ pour trouver $\underline{u}$, le champ de déplacement (3 points).
5. Quelle est l'augmentation totale de volume ΔV de la poutre (2 points) ?

Exercice 2 (*10 points*)

Soit la structure suivante (figure 2) composée de deux barres (comportement élastique linéaire isotrope) soudées ensemble et encastrées en haut et en bas. On considère un champ de déplacement linéaire dans chaque barre. Le déplacement possède un extremum à la jonction des barres et vaut $u(\frac{h}{2}) = \delta$ (cf. figure 3).

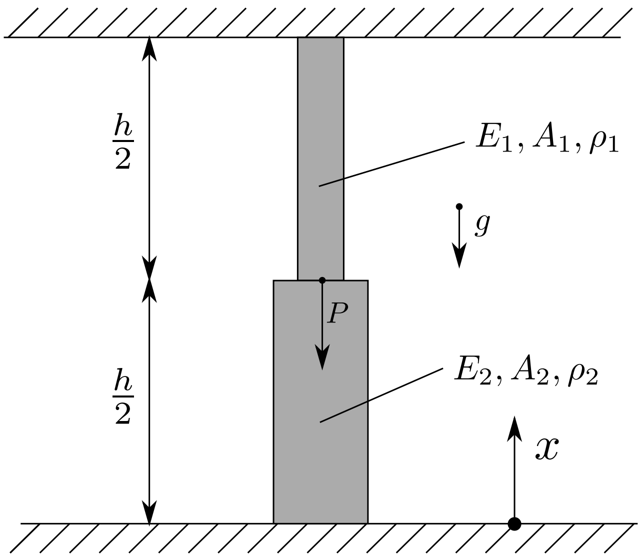

FIGURE 2 – Structure composée de deux barres de même longueur.

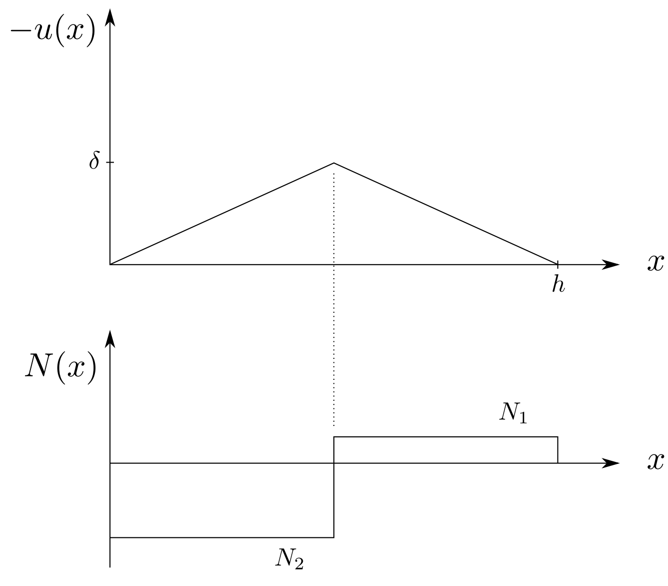

FIGURE 3 – Diagrammes du champ de déplacement supposé et de l'effort normal.

On considère deux cas de charge :

1. La structure est soumise à une charge ponctuelle P appliquée à mi hauteur.
   (a) Exprimer les efforts normaux N_1 et N_2 dans les barres (voir figure 3) en fonction des données du problème et de δ (2 points).
   (b) Calculer l'énergie potentielle du système (2 points).

(c) Calculer la valeur de δ qui minimise l'énergie potentielle (1 point).

(d) Dire s'il est nécessaire d'enrichir le champ de déplacement pour obtenir une meilleure solution (p.ex. un champ quadratique) ? Pourquoi ? (1 point)

2. La structure est soumise à son poids propre. On considère toujours un champ de déplacement linéaire comme sur la figure 3.

(a) Calculer l'énergie potentielle du système (2 points).

(b) Calculer la valeur de δ qui minimise l'énergie potentielle (1 point).

(c) Dire s'il est nécessaire d'enrichir le champ de déplacement pour obtenir une meilleure solution (p.ex. un champ quadratique) ? Pourquoi ? (1 point)

Exercice 3 (*6 points*)

Dans cet exercice, on s'intéresse à une plaque rectangulaire trouée. Son comportement est supposé linéaire élastique isotrope. Le trou est centré sur l'origine du repère et est de rayon a. La plaque est d'épaisseur h. La plaque est soumise à une contrainte uniaxiale statique σ_{xx} = constante = p à ses extrémités (voir figure 4).

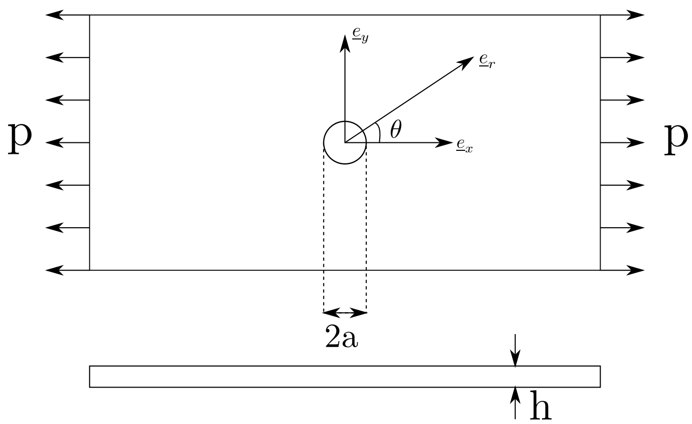

FIGURE 4 – Schéma de la plaque trouée étudiée.

La solution pour un matériau élastique linéaire isotrope est connue :

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{p}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left[1+\left(1-3\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right] \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{p}{2}\left[1+\frac{a^2}{r^2}-\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right] \\
\tau_{r\theta} &= -\frac{p}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(1+3\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta
\end{aligned}
\tag{1}
$$

1. Vérifier que cette solution satisfait les conditions aux limites en contraintes (2 points).
2. Quel est l'endroit où $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale ? Donner sa valeur (1 point).
3. Trouver où dans la plaque $\tau_{r\theta}$ est maximale, et donner sa valeur (1 point).

Pour la suite, nous ne considérons que l'état de contrainte au bord du trou ($r = a$).

4. Donner l'emplacement et la valeur de la contrainte maximale de cisaillement $\tau_{\max}$. Sur quel plan agit elle ? (1 point).
5. Quelle est la valeur du facteur d'intensité de contrainte $K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{xx}}$ (1 point) ?