

Partie Pratique (1h30 min)

TGC Vol 2&3 ainsi que notes de cours autorisés (32/48 points)

Bonne chance !

Problème 1 (8 points)

Un cube en caoutchouc ($\nu = 0.5$ ce qui implique que le caoutchouc est incompressible) est inséré dans une cavité de la même forme et taille ($1 \times 1 \times 1 \text{ m}^3$) dans un bloc en acier (Figure 1). Le haut du cube en caoutchouc est pressé par une plaque en acier avec une pression uniforme p (Pa). Nous considérons l'acier comme étant parfaitement rigide et nous postulons qu'il n'y a pas de frottement entre l'acier et le caoutchouc.

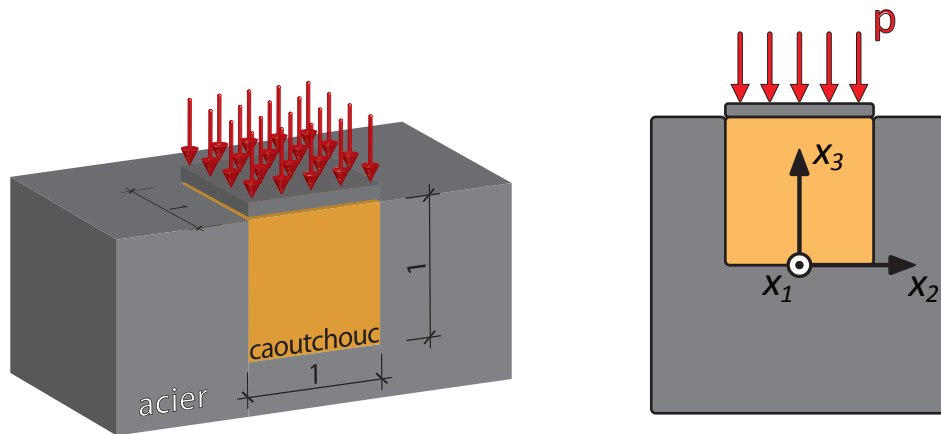


Figure 1: Géométrie des blocs (coupes)

1. Formuler les conditions limites (en déplacements et contraintes sur les faces du cube en caoutchouc).
2. Nous postulons le champ de déplacements suivant dans le caoutchouc:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = 0 \\ u_3 &= u_3(x_3) \end{aligned}$$

- a) Calculer les déformations (infinitésimales).
 - b) A partir de la loi constitutive linéaire élastique isotrope, calculer le champ de contraintes.
 - c) En utilisant les équations d'équilibre déterminer que u_3 est au plus une fonction linéaire en x_3 .
 - d) En exploitant les conditions aux limites déterminer la pression qu'exerce le caoutchouc sur les parois en acier.
3. Trouver la contrainte de cisaillement maximale dans le caoutchouc.

Problème 2 (10 points)

Dans le problème de torsion d'une barre en acier (matériau linéaire élastique isotrope) avec une section elliptique (figure 2), on trouve que les déplacements peuvent être écrits de la façon suivante:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha x_2 x_3 \\ u_2 &= \alpha x_3 x_1 \\ u_3 &= -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \alpha x_1 x_2 \quad (\text{déplacement hors plan}) \end{aligned}$$

où α est l'angle de rotation par unité de longueur (l'angle de torsion) de la barre. Soit $a = 2\text{cm}$, $b = 2\text{cm}$.

- Calculer les contraintes au point A.
- Quelle est la contrainte principale en A?
- Quelle est la contrainte de cisaillement maximale en A?
- Sur quels plans ces contraintes agissent-elles?
- Que se passe t-il si $a = b$?

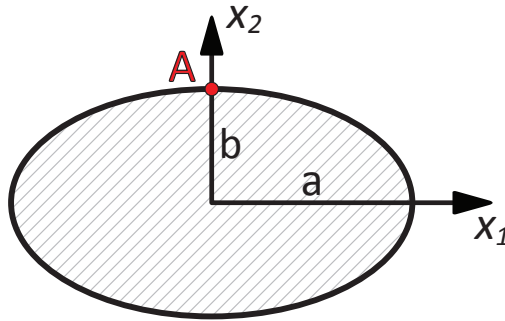


Figure 2: Section de la barre

Problème 3 (8 points)

Nous considérons un solide constitué d'un matériau élastique isotrope, dont la configuration de référence est sa forme d'équilibre à la température T_0 . On lui impose une température $T(\mathbf{x})$ où $\mathbf{x}$ est la position. On se place dans le cadre des transformations infinitésimales. Les déformations sont de la forme:

$$\varepsilon = \alpha (T(\mathbf{x}) - T_0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

1. A quelle condition sur le champ de température $T(\mathbf{x})$, le champ de déformation associé ε est-il géométriquement compatible ?

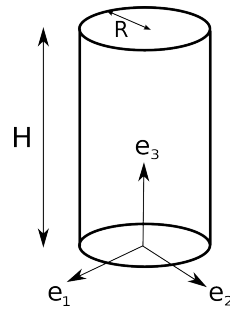


Figure 3: Cylindre

2. Le solide est désormais un cylindre de hauteur H et rayon R (cf. figure 3).

On soumet le cylindre à un champ de température linéaire en x_3 tel que

- $T(x_3 = H) = T_0 + \Delta T$
- $T(x_3 = 0) = T_0$

Le cylindre est libre (il n'est soumis à aucune condition au bord en déplacement). Calculer le champ de déplacement associé.

3. A quelle condition l'hypothèse de transformation infinitésimale est-elle justifiée ?

Problème 4: (6 points)

Une structure a une protusion (cf. figure 4). Nous considérons l'état de contrainte plan. Si les surfaces OA et OB sont libres de traction, montrer dans le cas où

1. $\theta = 90^\circ$
2. $\theta < 90^\circ$

que l'état de contraintes en "O" s'annule.

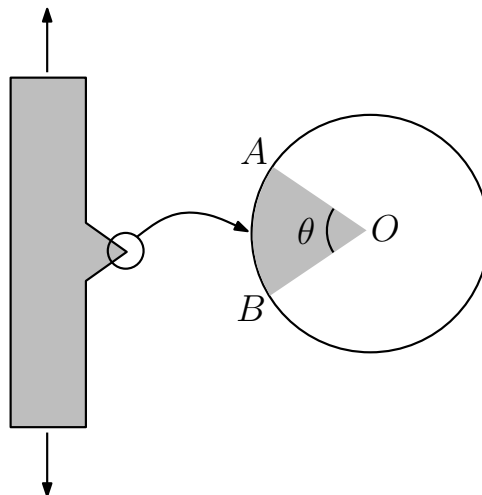


Figure 4: Structure avec une protusion