

Corrections : Préliminaires mathématiques (suite et fin)

Exercice 1 :

Calculer $\nabla(\underline{u})$ en coordonnées cylindriques pour le champ de déplacement

$u_r = A/r^2$ et $u_\theta = Br$ et $u_z = 0$ avec A et B constants.

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \frac{A}{r^2} \\ Br \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla \underline{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2A}{r^3} & -B & 0 \\ B & \frac{A}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 :

Calculer $\nabla(\underline{u})$ en coordonnées sphériques pour le champ de déplacement

$u_r = A/r^2 + Br$ et $u_\theta = 0$ et $u_\phi = 0$ avec A et B constants.

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \frac{A}{r^2} + Br \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla \underline{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - u_\phi \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{\tan \theta} \right) \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{\tan \theta} + u_r \right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2A}{r^3} + B & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A}{r^3} + B & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{r^3} + B \end{bmatrix}$$

Exercice 3 :

Calculer $\text{div } \mathbf{T}$ en coordonnées sphériques pour le champ tensoriel suivant :

$$T_{rr} = A - \frac{2B}{r^3}, T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3}, T_{r\theta} = T_{\theta r} = T_{\theta\phi} = T_{\phi\theta} = T_{r\phi} = T_{\phi r} = 0.$$

$$\text{div } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 :

On considère une source de chaleur qui produit un champ de température θ défini par $\theta = 2(x^2 + y^2)$

1. Sachant que la loi de Fourier s'écrit $\underline{q} = -k\nabla(\theta)$, calculer $\underline{q}$. Notez que $\underline{q}$ est un vecteur appelé flux de chaleur, et que k est un scalaire positif appelé conductivité thermique.

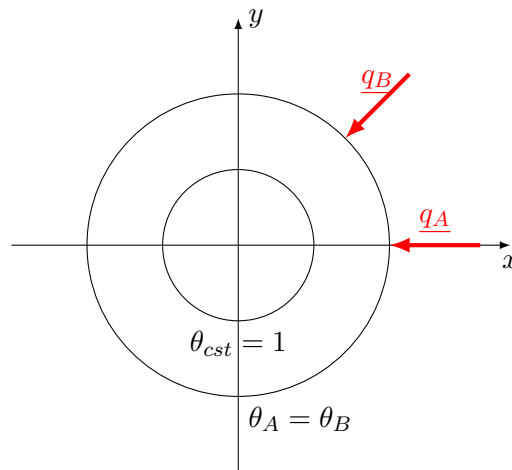
$$\nabla\theta = \begin{bmatrix} \theta_{,x} \\ \theta_{,y} \\ \theta_{,z} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{q} = \begin{bmatrix} -4kx \\ -4ky \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Calculer la température au point A de coordonnées $(1, 0)$ et au point B de coordonnées $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

$$\begin{aligned} \text{en } (1, 0) \quad \theta_A = 2 \quad \text{et } \underline{q}_A &= \begin{bmatrix} -4k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{en } (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \theta_B = 2 \quad \text{et } \underline{q}_B &= \begin{bmatrix} -2\sqrt{2}k \\ -2\sqrt{2}k \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Dessiner deux isothermes de votre choix ainsi que le flux de chaleur aux points A et B.

$\theta = 2(x^2 + y^2)$ correspond à l'équation d'un cercle. Les isothermes sont donc des cercles de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{\frac{\theta}{2}}$



Exercice 5 :

Le tenseur $\mathbf{T}$ s'écrit dans la base $\underline{e}_i$:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exprimer T'_{11} , T'_{12} et T'_{31} dans la base orthonormée $\underline{e}'_i$ où $\underline{e}'_1$ a la direction de $-\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$ et $\underline{e}'_2$ la direction de $\underline{e}_1$.

Le tenseur $\mathbf{T}$ doit être exprimé dans une base $\underline{e}'_i$ qui est une transformation des axes des bases $\underline{e}_i$. Les vecteurs de la base $\underline{e}'_i$ doivent être normés.

$$\begin{aligned} \underline{e}'_1 &= \frac{1}{\|-\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3\|}(-\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \underline{e}'_2 &= \frac{1}{\|\underline{e}_1\|}\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour un système orthonormé direct $\underline{e}'_3$ est défini par

$$\underline{e}'_3 = \underline{e}'_1 \times \underline{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour exprimer T'_{ij} (changement de base), on peut utiliser la règle de transformation :

$$T'_{ij} = Q_{ri} Q_{sj} T_{rs}$$

où $\mathbf{T}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q}$ avec

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^t \\ \mathbf{e}_2^t \\ \mathbf{e}_3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -15\sqrt{5} & 2 \\ -15\sqrt{5} & 5 & 5\sqrt{5} \\ 2 & 5\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix}$$

Donc $T'_{11} = \frac{4}{5}$, $T'_{12} = -3\sqrt{5}$ et $T'_{31} = \frac{2}{5}$

Remarque : comme il est uniquement demandé de calculer 3 coefficients, il est possible de calculer directement $T'_{11} = \mathbf{e}_1^t T \mathbf{e}_1$, $T'_{12} = \mathbf{e}_1^t T \mathbf{e}_2$ et $T'_{31} = \mathbf{e}_3^t T \mathbf{e}_1$.

Exercice 6 :

Soit $\mathbf{T}$ le tenseur suivant :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la partie symétrique et antisymétrique de $\mathbf{T}$.

Le tenseur $\mathbf{T}$ est symétrique si $\mathbf{T} = \mathbf{T}^t$, Le tenseur $\mathbf{T}$ est antisymétrique si $\mathbf{T} = -\mathbf{T}^t$. Tout tenseur $\mathbf{T}$ peut être décomposé comme la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^A$$

avec $\mathbf{T}^S = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^t)$ et $\mathbf{T}^A = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^t)$

$$\mathbf{T}^S = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Déterminer le vecteur dual $\underline{t}^A$ de la partie anti-symétrique $\mathbf{T}^A$ de $\mathbf{T}$ (aussi appelé vecteur axial), défini tel que :

$$\mathbf{T}^A \underline{a} = \underline{t}^A \times \underline{a} \quad \forall \underline{a}$$

Indication : exprimer les composantes de $\underline{t}^A$ à partir des composantes de $\mathbf{T}^A$ en partant de $T_{12}^A = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}^A \mathbf{e}_2$. Rappel (permutation du produit mixte) : $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$

$$T_{12} = \mathbf{e}_1 \mathbf{T} \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{t}^A \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{t}^A \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{t}^A \mathbf{e}_3 = -t_3^A$$

de même $T_{31} = -t_2^A$ et $T_{23} = -t_1^A$

$$\mathbf{t}^A = -(T_{23} \mathbf{e}_1 + T_{31} \mathbf{e}_2 + T_{12} \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 7 :

Soit $\mathbf{T}$ le tenseur suivant :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les trois invariants, les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{T}$. Les 3 invariants de $\mathbf{T}$ sont :

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{T}) = 7$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)) = \frac{1}{2}(7^2 - (5^2 + 4^2 + 4^2 + 1^2 + 3^2)) = -9$$

$$I_3 = \det(\mathbf{T}) = -15 - 48 = -63$$

Les valeurs propres sont les racines de : $\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 & 0 \\ 4 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(-1 - \lambda)(3 - \lambda) - 16(3 - \lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda - 63 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 7 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$$

Ici puisque les valeurs propres et les invariants doivent être calculés, il est intéressant de calculer d'abord les valeurs propres puis d'utiliser les expressions des invariants en fonction des valeurs propres :

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Ces expressions sont obtenues à partir de la définition des invariants dans la base propre.

Les vecteurs propres sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\underline{n}_i &= \lambda_i \underline{n}_i \\ (\mathbf{T} - \lambda_i \mathbf{I})\underline{n}_i &= 0 \end{aligned}$$

— pour $\lambda_1 = 7$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 2x_2, \quad x_1 = 2x_2, \quad x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

— pour $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -2x_2, \quad x_1 = x_2, \quad x_1 = x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{n_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 = -x_2, \quad 2x_1 = -x_2, \quad x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{n_3} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Si $\underline{n_1}, \underline{n_2}$ et $\underline{n_3}$ sont les vecteurs propres, écrire $[\mathbf{T}]_{\underline{n_i}}$.

$$[\mathbf{T}]_{\underline{n_i}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Est-ce que la matrice suivante représente le tenseur $\mathbf{T}$ par rapport à une base de référence arbitraire ?

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on vérifie que les invariants sont identiques (les matrices d'un même tenseur dans deux bases ont les mêmes invariants, et la réciproque est également vraie : deux matrices ayant les mêmes invariants représentent le même tenseur dans deux bases différentes)

$$I'_1 = \text{tr}(\mathbf{T}') = 7 = I_1$$

$$I'_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{T}')^2 - \text{tr}(\mathbf{T}'^2)) = \frac{1}{2}(7^2 - 59) = -5 \neq I_2$$

$$I'_3 = \det(\mathbf{T}') = -3 \neq I_3$$

Donc $\mathbf{T}'$ n'est pas une représentation de la matrice $\mathbf{T}$ dans une autre base.