

# Mécanique analytique

F. Mila et P. De Los Rios

Cours de troisième semestre

Hiver 2006 – 2007



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels de mécanique newtonienne</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	1
1.2	Exemple d'une particule . . . . .	2
1.3	Système de $N$ particules . . . . .	5
1.4	Intégrales premières . . . . .	8
1.5	Contraintes et coordonnées généralisées . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Les équations de Lagrange</b>	<b>13</b>
2.1	Le principe de d'Alembert . . . . .	13
2.2	Variables cycliques et lois de conservation . . . . .	17
2.3	Petites oscillations . . . . .	19
2.3.1	Oscillateur harmonique . . . . .	19
2.3.2	Systèmes à plusieurs degrés de liberté . . . . .	21
2.4	Introduction au calcul des variations . . . . .	25
2.5	Le principe de moindre action . . . . .	27
2.6	Théorème des extremums liés . . . . .	30
2.7	Contraintes holonômes . . . . .	32
2.8	Equations de Lagrange et forces de contrainte . . . . .	34

2.9	Contraintes plus générales . . . . .	36
2.10	Contraintes intégrales . . . . .	40
2.11	Lagrangien et changements de référentiels . . . . .	42
2.12	Le théorème de Noether . . . . .	43
2.12.1	Exemple: Invariance par translations . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Les équations de Hamilton</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction . . . . .	45
3.2	Crochets de Poisson . . . . .	50
3.3	Principe de moindre action . . . . .	56
3.4	Transformations canoniques: fonctions génératrices . . . . .	57
3.5	Structure symplectique . . . . .	60
3.6	Crochets de Poisson . . . . .	65
3.7	L'équation de Hamilton-Jacobi : cas général . . . . .	66
3.8	Hamilton-Jacobi : $H$ indépendant du temps . . . . .	71
3.9	Séparation des variables . . . . .	73
<b>4</b>	<b>L'espace des phases</b>	<b>77</b>
4.1	Définition . . . . .	77
4.2	Systèmes à 1 degré de liberté : portrait de phase . . . . .	77
4.3	Variables action-angle . . . . .	79
4.4	Systèmes séparables : variables action-angle . . . . .	83
4.5	Systèmes intégrables . . . . .	84
4.6	Théorème de Liouville . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Introduction aux systèmes dynamiques</b>	<b>89</b>

5.1	Définitions . . . . .	89
5.2	Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs . . . . .	90
5.3	Points fixes et stabilité . . . . .	91
5.4	Petites oscillations: point de vue hamiltonien . . . . .	94
5.5	Problème à 3 corps restreint . . . . .	97
5.6	Chaos dans les systèmes hamiltoniens . . . . .	102
5.7	“Mesure” du chaos et exposants de Lyapounov . . . . .	106
5.8	Bifurcations et attracteurs étranges . . . . .	109

## Remarques préliminaires :

L'objet de ce cours est de présenter un certain nombre de développements théoriques plus ou moins formels relatifs à l'étude de systèmes dont l'évolution peut se décrire par un ensemble d'équations différentielles couplées en général non linéaires. Il y a trois motivations principales :

- Dans le cadre de la mécanique classique, les équations du mouvement sont en principe très simples ( $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ ), mais le comportement d'un système aussi simple que Soleil + Terre + Lune reste un problème non résolu. Plus précisément, on ne possède pas de solution analytique des équations du mouvement, et la nature de l'évolution pour les temps longs (régulière ou chaotique !) reste un problème ouvert. Le formalisme hamiltonien permet de poser le problème de façon précise et constitue une étape très importante vers sa solution.
- Les lois régissant la matière au niveau atomique ou sub-atomique ne relèvent plus de la mécanique classique, mais de la mécanique quantique. Ceci étant, la description quantique de la matière repose de façon tout à fait essentielle sur la formulation hamiltonienne du problème classique correspondant.
- Enfin, de nombreux systèmes conduisent à des équations d'évolution qui peuvent se mettre sous la forme d'équations différentielles couplées. De tels systèmes s'appellent des systèmes dynamiques, et ce cours est dans une certaine mesure une introduction à l'étude des systèmes dynamiques au sens large.

## Livres :

- "Classical Mechanics", Herbert Goldstein.  
Référence internationale.
- "Mécanique", Landau et Lifshitz.  
Très compact.

# Chapitre 1

## Rappels de mécanique newtonienne

### 1.1 Introduction

L'objet de la mécanique est de décrire l'évolution au cours du temps d'un système de particules (= points matériels) en interaction. L'expérience prouve que l'état d'un système est entièrement déterminé si l'on se donne la position et la vitesse de chaque particule à un instant donné. Si l'on repère les particules par un indice  $i$ , on définit :

$m_i$  = masse de la particule  $i$ ,

$\vec{OM}_i \equiv \vec{r}_i$  = position de la particule  $i$ ,

$\vec{v}_i \equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt}$  = vitesse de la particule  $i$ ,

$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$  = impulsion de la particule  $i$ ,

$\vec{a}_i \equiv \frac{d\vec{v}_i}{dt}$  = accélération de la particule  $i$ .

La loi fondamentale de la dynamique, aussi appelée *deuxième loi de Newton*, stipule que l'évolution du système peut se décrire à l'aide du système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

où  $\vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t)$  est *a priori* une fonction des positions et des vitesses de toutes les particules, ainsi que du temps, mais *pas* des accélérations.

En général, les masses ne dépendent pas du temps, et on obtient donc un système d'équations différentielles du second ordre :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.2)$$

Exemples :

- $\vec{F}_i = -G \sum_{k \neq i} m_i m_k \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_k\|^3}$  (Gravitation universelle)
- $\vec{F}_i = q \left( \vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) \right)$  (Particule dans un champ électromagnétique)

Dans tous les exemples d'application courante, la force  $\vec{F}_i$  peut se décomposer de la façon suivante :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}(\vec{r}_i, \vec{v}_i, \vec{r}_j, \vec{v}_j, t). \quad (1.3)$$

**Première loi de Newton** : il existe des référentiels dits inertiels ou galiléens dans lesquels, pour un système de particules isolées,  $\vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{0}$ .

Pour beaucoup de situations expérimentales, un référentiel fixe par rapport à la terre peut être considéré comme galiléen, mais il est néanmoins souvent nécessaire de se placer dans un référentiel lié au soleil ou aux étoiles fixes pour avoir une approximation correcte d'un référentiel galiléen.

**Troisième loi de Newton** (principe de l'action et de la réaction) :

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (1.4)$$

Remarque : c'est vrai pour la gravitation universelle, le problème majeur auquel s'intéressait Newton, mais pas de façon générale, par exemple pour l'interaction entre particules chargées en mouvement.

## 1.2 Exemple d'une particule

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} \quad (1.5)$$

Pour une particule isolée dans un référentiel galiléen,  $\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}$  est constant.

C'est une autre formulation de la *première loi de Newton* : une particule isolée dans un référentiel galiléen est animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

Si  $\vec{F}^{\text{ext}} \neq \vec{0}$ , il est souvent utile d'introduire des fonctions de  $\vec{r}$  et  $\vec{p}$  pour étudier le mouvement.



**Moment cinétique**

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (1.6)$$

(N.B.  $\vec{r} = O\vec{M} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} =$  moment cinétique par rapport au point  $O$ ).

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \wedge \vec{p}}_{=\vec{0}} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} \quad (1.7)$$

**Théorème du moment cinétique** : la dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale au moment des forces extérieures.

**Application** : si  $\vec{r} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$ , par exemple pour une force centrale telle que  $\vec{F}^{\text{ext}} \parallel \vec{r}$ ,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} \text{ est constant.} \quad (1.8)$$

**Travail et énergie**

Le travail de la force  $\vec{F}^{\text{ext}}$  le long d'une trajectoire allant d'un point 1 à un point 2 est défini par

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}^{\text{ext}} \cdot d\vec{s} \quad (1.9)$$

où  $\vec{s}$  est l'abscisse curviligne le long de la trajectoire.

Puisque  $\vec{F}^{\text{ext}} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$  et  $d\vec{s} = \vec{v} dt$ , on a

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ &= \int_1^2 m \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) dt = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Mais  $\frac{mv^2}{2} \equiv T =$  énergie cinétique, et donc

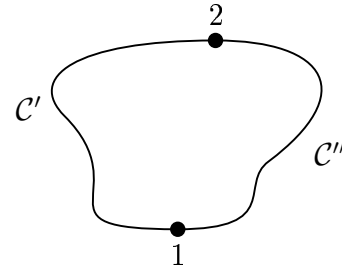
$$W_{12} = T_2 - T_1. \quad (1.11)$$

**Cas particulier** : Systèmes conservatifs.

Un système est dit conservatif si le travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi.

Conséquence :  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$

En effet, décomposons le chemin  $\mathcal{C}$  en deux chemins  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}''$  tels que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$



$$\begin{aligned} \int_{1\mathcal{C}'}^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{1\mathcal{C}''}^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{2\mathcal{C}''}^1 \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{1\mathcal{C}'}^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{2\mathcal{C}''}^1 \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Or, d'après la formule de Stokes,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \int_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \cdot d\vec{n} \quad (1.13)$$

où  $\mathcal{S}$  est une surface quelconque s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ , et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normale à la surface.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{0} \text{ pour tout chemin fermé} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}} \quad (\text{voir exercices}). \quad (1.14)$$

**Potentiel :**

Puisque  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$ , il existe une fonction  $V(\vec{r})$  telle que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\nabla} V(\vec{r}) \quad (1.15)$$

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_1^2 \overrightarrow{\nabla} V \cdot d\vec{s} = V_1 - V_2. \quad (1.16)$$

On dit que  $\vec{F}$  dérive du potentiel  $V$ .

On obtient donc dans le cas d'une force conservative :

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= T_2 - T_1 \\ \Rightarrow T_1 + V_1 &= T_2 + V_2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Si on définit l'énergie mécanique par  $E = T + V$ , on en déduit un nouveau théorème.

**Théorème de l'énergie mécanique :** pour un système où la force dérive d'un potentiel, l'énergie mécanique est conservée.

### 1.3 Système de $N$ particules

Considérons un système de  $N$  particules dont les interactions mutuelles sont régies par la troisième loi de Newton (principe de l'action et de la réaction).

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \\ \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ji}}_{=\sum_{i < j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Il est utile d'introduire les définitions suivantes :

Centre de masse :

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad (1.19)$$

Impulsion totale :

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}} \quad (1.20)$$

On obtient donc :

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \equiv \vec{F}^{\text{ext}} \quad (1.21)$$

**Théorème** : le centre de masse se comporte comme un point matériel de masse totale  $M$  soumis à une force extérieure égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur chacune des particules.

**Corollaire** : pour un système isolé dans un référentiel galiléen,  $\vec{P}$  est conservé.

Introduisons les coordonnées barycentriques par rapport au centre de masse

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{R} + \vec{r}'_i \\ \vec{v}_i &= \vec{V} + \vec{v}'_i, \quad \vec{V} = \dot{\vec{R}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

**Moment cinétique**

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i \\ &= \sum_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \wedge m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i) \\ &= \sum_i [\vec{R} \wedge m_i \vec{V} + \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{V} + \vec{R} \wedge m_i \vec{v}'_i + \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i] \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \sum_i \vec{R} \wedge m_i \vec{V} &= M \vec{R} \wedge \vec{V} \\
\bullet \quad \sum_i m_i \vec{r}'_i &= \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = \sum_i m_i \vec{r}_i - M \vec{R} = \vec{0} \\
\bullet \quad \sum_i m_i \vec{v}'_i &= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}'_i = \vec{0} \\
\Rightarrow \quad \vec{L} &= M \vec{R} \wedge \vec{V} + \sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{p}'_i. \tag{1.24}
\end{aligned}$$

**Premier théorème de Kœnig** : le moment cinétique par rapport au point  $O$  est égal à la somme du moment cinétique du centre de masse par rapport au point  $O$  et des moments cinétiques des particules par rapport au centre de masse.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \vec{L} &= \underbrace{\sum_i \dot{\vec{r}}_i \wedge \vec{p}_i}_{=\vec{0}} + \sum_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{p}}_i \\
&= \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji}}_{\sum_{i < j} (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij})} \\
&= \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{F}_{ji} \tag{1.25}
\end{aligned}$$

**Théorème du moment cinétique** : si  $\vec{F}_{ji}$  est dirigée suivant  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  (c'est le cas pour la gravitation), la dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale au moment des forces extérieures appliquées au système :

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}}. \tag{1.26}$$

Pour un système isolé,  $\vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{0}$  dans un référentiel galiléen

$$\Rightarrow \quad \vec{L} \text{ est conservé.}$$

**Energie** : L'énergie cinétique totale est donnée par

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i)^2 \\
&= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i{}^2 \quad \left( \sum_i m_i \vec{v}'_i = \vec{0} \right). \tag{1.27}
\end{aligned}$$

**Deuxième théorème de Kœnig** : l'énergie cinétique totale est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de l'énergie cinétique des particules par rapport au centre de masse.

**Travail** : Supposons que le système évolue entre une configuration

$A = \{\vec{r}_1^A, \dots, \vec{r}_N^A, \vec{v}_1^A, \dots, \vec{v}_N^A\}$  et  $B = \{\vec{r}_1^B, \dots, \vec{r}_N^B, \vec{v}_1^B, \dots, \vec{v}_N^B\}$ . Le travail des forces  $\vec{F}_i$  entre  $A$  et  $B$  est défini par

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i \\ &= \sum_i \int_A^B m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \int_A^B m_i \frac{d}{dt} (\vec{v}_i^2) dt \\ \Rightarrow W_{AB} &= T_B - T_A \end{aligned} \quad (1.28)$$

Supposons que

$$\vec{F}_i^{\text{ext}} = -\vec{\nabla}_i V_i \quad (1.29)$$

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}, \quad V_{ij} = V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \quad (1.30)$$

Cette deuxième condition est satisfaite si la loi d'action-réaction est satisfaite, et si la force est dirigée suivant  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ . Alors

$$\int_A^B \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i + \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{s}_j = - \int_A^B \vec{\nabla}_i V_{ji} \cdot d\vec{s}_i - \int_A^B \vec{\nabla}_j V_{ij} \cdot d\vec{s}_j. \quad (1.31)$$

Mais si on définit  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  et  $\vec{\nabla}_{ij} \equiv \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}}$ , on a

$$\vec{\nabla}_i V_{ij} = \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} = -\vec{\nabla}_j V_{ij} \quad (1.32)$$

$$\text{et } d\vec{s}_i - d\vec{s}_j = d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = d\vec{r}_{ij} \quad (1.33)$$

$$\text{d'où } \int_A^B \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i + \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{s}_j = - \int_A^B \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = V_{ij}^A - V_{ij}^B. \quad (1.34)$$

Comme

$$\sum_i \left( \sum_{j \neq i} \int_A^B \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \left( \int_A^B \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i + \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{s}_j \right), \quad (1.35)$$

on en déduit :

$$W_{AB} = V_A - V_B \quad (1.36)$$

$$V_A = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}. \quad (1.37)$$

L'énergie mécanique totale  $E = T + V$  est alors conservée.

## 1.4 Intégrales premières

De façon générale, une intégrale première est une fonction des positions, des vitesses et du temps qui est conservée au cours du temps :

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t) = \text{constante.} \quad (1.38)$$

Chaque intégrale première conduit à une équation différentielle du *premier ordre*. Comme un système mécanique est défini par la donnée de la position et de la vitesse de chaque particule, les intégrales premières sont un pas très utile vers la solution.

Si on connaît  $6N$  intégrales premières pour un système, il suffit d'inverser le système :

$$\begin{aligned} f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t) &= c_i, & i &= 1, \dots, 6N \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{r}_i &= g_i(c_1, \dots, c_{6N}, t) \\ \vec{v}_i &= h_i(c_1, \dots, c_{6N}, t) \end{aligned} \right\} & i &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Une grande partie de ce cours sera donc logiquement consacrée à la recherche d'intégrales premières. Malheureusement (ou heureusement ?!) il n'est en général pas possible de trouver  $6N$  intégrales premières. Dans le cas d'un système de particules isolées avec des interactions à 2 corps dérivant d'un potentiel, on a en général 10 intégrales premières :

- $\vec{P}$  (3)
- $M\vec{R} - \vec{P}t$  (3)
- $\vec{L}$  (3)
- $E$  (1)

Dans le cas d'une particule, elles ne sont bien sûr pas indépendantes. Dans le cas de deux particules, il en faudrait déjà 12 pour que le problème soit résolu. Il faut donc encore travailler. Dans le cas général, l'existence ou non d'intégrales premières a des conséquences sur la nature du mouvement (mouvement régulier ou chaotique). L'un des objectifs des développements de ce cours est d'exposer la méthode la plus systématique de recherche d'intégrales premières.

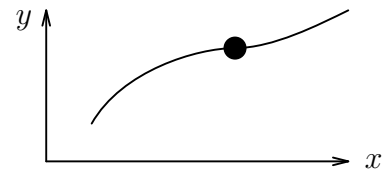
## 1.5 Contraintes et coordonnées généralisées

La formulation newtonienne de la mécanique est mal adaptée à un certain type d'action extérieure appelée *contrainte*.

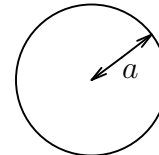
Exemples :

a) Corps solides :  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = d_{ij}^2 = \text{constante}$ .

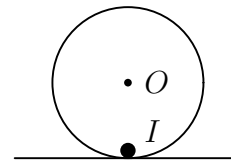
b) Perle sur un fil :  $y = f(x)$  est fixé au départ



c) Particule qui se déplace sur une sphère :  $r^2 \geq a^2$ .



d) Sphère qui roule sans glisser sur un plan :  $\vec{V}_I = \vec{0}$ .



Une telle contrainte fait intervenir la vitesse.

En général, une contrainte s'écrit comme une égalité ou une inégalité qui fait intervenir les positions, les vitesses et le temps. Dans le cadre de la mécanique newtonienne, il faut faire intervenir des forces extérieures qui ne sont pas connues *a priori* et qui doivent s'adapter pour que les contraintes soient satisfaites.

### Contraintes holonômes

Une contrainte holonôme est une contrainte qui peut se mettre sous la forme

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \quad (1.40)$$

- Egalité
- Les vitesses n'apparaissent pas.

Supposons qu'un système soit défini par  $k$  contraintes holonômes. Le système d'équations

$$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (1.41)$$

doit permettre d'exprimer les positions  $\vec{r}_i$  en fonction de  $3N - k$  coordonnées généralisées  $q_i$  :

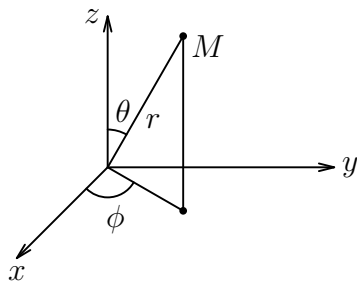
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t). \quad (1.42)$$

*Définition* : tout système de coordonnées  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, 3N - k$ , qui permet de décrire un système en satisfaisant automatiquement les  $k$  contraintes holonômes auxquelles il est soumis s'appelle un système de coordonnées généralisées.

*Remarque* : s'il n'y a aucune contrainte, tous les systèmes de coordonnées sont des systèmes de coordonnées généralisées !

*Exemple* : particule astreinte à se déplacer sur une sphère :  $r = a$ .

En coordonnées sphériques,



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$\theta, \phi$  sont les coordonnées généralisées.

Si le problème est simplement de trouver les équations du mouvement satisfaites par les coordonnées généralisées, autrement dit si l'on n'a pas besoin de déterminer les forces de contraintes, les équations de la mécanique newtonienne sont mal adaptées.

Par ailleurs, dans un tel cas, l'énergie potentielle est souvent plus facile à exprimer en fonction des coordonnées généralisées que des coordonnées cartésiennes. Malheureusement la formulation newtonienne de la mécanique fait intervenir les forces, c'est-à-dire les dérivées de l'énergie potentielle par rapport aux coordonnées cartésiennes.

*Définition* : si un système de  $N$  particules est décrit par des coordonnées généralisées  $\{q_j\}$ , les *forces généralisées* sont définies par

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

**Proposition** : si les forces  $\vec{F}_i$  dérivent d'un potentiel  $V$ ,  $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ .

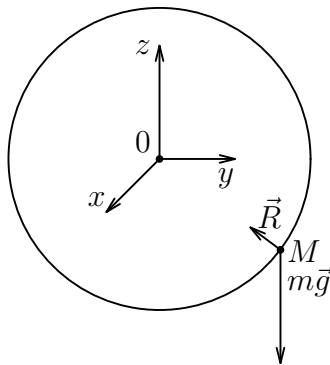
*Démonstration* :

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

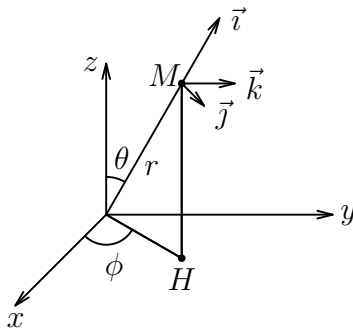


L'un des objectifs du chapitre suivant sera de formuler la mécanique à l'aide d'équations qui soient valables dans n'importe quel système de coordonnées, et qui fassent intervenir directement les coordonnées généralisées et les forces généralisées.

*Exemple* : pendule sphérique = point matériel qui peut glisser sans frottement à l'intérieur d'une sphère.



Comme il n'y a pas de frottement, la réaction ne travaille pas. Elle doit donc être perpendiculaire à la vitesse, c'est-à-dire dirigée vers  $O$ .



Les deux degrés de liberté sont  $\theta$  et  $\phi$ . Il faut donc deux équations du mouvement. Comme il n'y a pas de frottement, l'énergie mécanique est conservée.

$$\text{Or, } \vec{r} \begin{vmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v} \begin{vmatrix} r\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ r\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r\dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -r\dot{\theta} \sin \theta \end{vmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2}m (r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2). \quad (1.43)$$

L'énergie potentielle est égale à  $mgz = mgr \cos \theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m (r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgr \cos \theta = E_0. \quad (1.44)$$

Comme il y a deux degrés de liberté, il faut impérativement une autre équation, le but étant d'en trouver une qui ne fasse pas intervenir la force de réaction.

*1<sup>ère</sup> méthode* :  $m\vec{a} = \vec{F} = \vec{R} + m\vec{g}$ . Comme  $\vec{R} + m\vec{g}$  n'a pas de composante suivant  $\vec{k}$ , on a

$$m\vec{a} \cdot \vec{k} = \vec{0}.$$

Il faut calculer l'accélération en coordonnées sphériques dans le référentiel local.

2<sup>ème</sup> méthode : on cherche s'il n'y a pas une autre intégrale première.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= O\vec{M} \wedge \vec{F} = O\vec{M} \wedge \vec{P} \perp (Oz) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}L_z &= 0 \\ \Rightarrow L_z &= \text{constante} \end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned} L_z &= m(xv_y - yv_x) \\ &= mr^2\dot{\theta}(\sin\theta \cos\phi \cos\theta \sin\phi - \sin\theta \sin\phi \cos\theta \cos\phi) \\ &\quad + mr^2\dot{\phi}(\sin^2\theta \cos^2\phi + \sin^2\theta \sin^2\phi) \\ &= mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta = L_z^0. \end{aligned}$$

*Conclusion* : on s'en sort assez bien si l'on pense à cette seconde intégrale première, mais ce n'est pas une approche systématique. On va développer dans le chapitre suivant une méthode qui conduit automatiquement à cette solution.

# Chapitre 2

## Les équations de Lagrange

### 2.1 Le principe de d'Alembert

Considérons un système de points matériels soumis à des liaisons parfaites qui astreignent les positions des points matériels à satisfaire  $k$  contraintes holonômes sans déperdition d'énergie. Pour décrire un tel système à l'aide des équations de Newton, il faut introduire un champ de forces de contrainte. Pour un système de  $N$  particules, cela conduit à  $6N$  inconnues:  $3N$  coordonnées pour décrire les positions des particules, et les  $3N$  composantes des  $N$  forces de contrainte agissant sur les particules. Or, on ne dispose *a priori* que de  $3N + k$  équations: les  $3N$  équations du mouvement  $\vec{p}_i = \vec{F}_i$ , et les  $k$  contraintes. Pour pouvoir résoudre le problème, il est donc indispensable d'introduire  $3N - k$  conditions supplémentaires.

Par exemple, dans le cas du pendule sphérique, il y a une contrainte holonôme, et  $N = 1$  puisqu'on considère une seule particule. Il faut donc deux équations supplémentaires. Ces équations découlent de l'hypothèse que la force de contrainte ne travaille pas, donc qu'elle est centrale, ce qui implique que ses deux composantes tangentes à la sphère sont nulles.

Le principe de d'Alembert est une généralisation de cette condition au cas général d'un système quelconque soumis à  $k$  contraintes holonômes. Sa formulation repose sur la notion de *déplacement virtuel*.

**Définition** : un déplacement *virtuel* est un déplacement infinitésimal qui, à un instant donné, satisfait les contraintes holonômes imposées à un système.

Si on note  $\{\delta\vec{r}_i\}$  un tel déplacement, il satisfait les conditions

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.1)$$

En effet, cela découle de la condition

$$f_j(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N, t) = f_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) + \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r}_i + \dots = 0$$

En fonction des  $3N - k$  coordonnées généralisées correspondant aux  $k$  contraintes holonomes, les déplacements virtuels sont de la forme:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

où  $\delta q_j$  est quelconque. En effet, par définition des coordonnées généralisées,

$$f_j(\vec{r}_1(q_1, \dots, q_N, t), \dots, \vec{r}_N(q_1, \dots, q_N, t), t) = 0$$

ce qui, en dérivant par rapport à  $q_k$ , conduit à:

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0$$

Tout déplacement de la forme  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$  est donc un déplacement virtuel. Comme la condition (2.1) est linéaire, on en déduit la propriété cherchée.

Le principe de d'Alembert consiste à traduire l'idée que les forces de contrainte ne travaillent pas par la condition:

$$\sum_i \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (2.2)$$

Cette condition doit être valable pour tout déplacement virtuel. D'après la forme des déplacements virtuels, cela conduit à

$$\sum_i \vec{R}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \quad (2.3)$$

où les  $\delta q_j$  sont quelconques. Le choix  $\delta q_k = 0$  si  $k \neq j$ ,  $\delta q_j \neq 0$  conduit à l'équation:

$$\sum_i \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0$$

Comme cette équation est valable pour  $j = 1, \dots, 3N - k$ , on obtient bien  $3N - k$  équations supplémentaires.

Finalement, si l'on écrit les équations du mouvement sous la forme:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{R}_i \quad (2.4)$$

où  $\vec{R}_i$  est la force de contrainte et  $\vec{F}_i^{(a)}$  la résultante de l'ensemble des autres forces appliquées à la particule  $i$ , on peut éliminer les forces de contraintes, ce qui conduit à l'expression usuelle du principe de d'Alembert:

**Principe de d'Alembert** : pour tout déplacement virtuel  $\delta\vec{r}_i$ , on a :

$$\sum_i \left( \vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (2.5)$$

*N.B.* : les contraintes interviennent dans cette équation par le fait que  $\{\delta\vec{r}_i\}$  n'est pas un déplacement quelconque mais un déplacement satisfaisant les contraintes holonomes. Si  $\{\delta\vec{r}_i\}$  pouvait être un déplacement absolument quelconque, on déduirait de ces équations que

$$\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i = 0, \quad (2.6)$$

ce qui correspond au système sans contrainte. Autrement dit, les déplacements  $\delta\vec{r}_i$  ne sont plus des variables indépendantes.

D'après la forme des déplacements virtuels, ce principe conduit à  $3N - k$  équations du mouvement. Essayons de les exprimer en fonction des coordonnées généralisées. Pour cela, reportons les expressions:

$$\begin{aligned} \delta\vec{r}_i &= \sum_j \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ \vec{v}_i &= \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

dans le principe de d'Alembert. Il vient:

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}}_{\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j} \right) - \vec{v}_i \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial\dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} v_i^2 \right) \\ \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_{i,j} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial\dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j \\ &= \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial\dot{q}_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \\
\rightarrow \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i,j} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_j Q_j \delta q_j
\end{aligned}$$

où  $Q_j \equiv \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$  est la force généralisée.

Le principe de d'Alembert conduit donc à l'équation :

$$\sum_j \left[ \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (2.8)$$

Comme cette équation doit être satisfaite pour une variation quelconque des  $\delta q_j$ , on en déduit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (2.9)$$

Supposons par ailleurs que la force appliquée dérive d'un potentiel global  $V$ . Nous avons vu que les forces généralisées sont données par

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (2.10)$$

L'équation s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \\
\text{soit } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} &= 0 \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Mais comme  $V$  ne dépend que des  $\vec{r}_i$ , donc que des  $q_j$ ,  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ . On peut donc finalement écrire :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \quad (2.12)$$

avec  $L = T - V =$  lagrangien.

Ces équations s'appellent les *équations de Lagrange*. Elles ont les propriétés remarquables suivantes :

- Elles conduisent directement aux équations du mouvement pour les coordonnées généralisées.

- Elles ne font pas intervenir les forces de contrainte.
- De façon plus générale, ces équations restent valables tant que les forces sont reliées au potentiel par :

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (2.13)$$

*Exemple* : particule dans un champ électromagnétique (voir exercice).

- Par ailleurs, le lagrangien n'est pas défini de façon unique. Plus précisément, si  $F(q_1, \dots, q_n, t)$  est une fonction des coordonnées généralisées et du temps mais *pas* des vitesses généralisées, la fonction

$$L'(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) + \frac{d}{dt} F$$

conduit aux mêmes équations.

*Démonstration* :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L'}{\partial q_i} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{d}{dt} F \right) \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} &= \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}}_{=0} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{dF}{dt} \right)}_{=0}. \end{aligned}$$

si  $L = \text{lagrangian}$

- Enfin, les équations de Lagrange ont la même forme dans tous les systèmes de coordonnées.

## 2.2 Variables cycliques et lois de conservation

Si  $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ , i.e. si le lagrangien ne dépend pas d'une coordonnée, la quantité  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$  est conservée. C'est une intégrale première. Dans ce cas, on dit que la variable  $q_j$  est *cyclique*. La quantité

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.14)$$

s'appelle l'*impulsion généralisée* par analogie avec la particule libre. En effet, pour une particule libre,

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \text{ et } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x. \quad (2.15)$$

*Exemple* : Considérons une particule libre ( $V = 0$ ).

- Coordonnées cartésiennes :  $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  est indépendant de  $x, y, z$   
 $\Rightarrow p_x, p_y$  et  $p_z$  sont conservés.
- Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \text{ est indépendant de } \theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{constante.}$$

Mais  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = L_z$  composante du moment cinétique suivant  $z$ . En effet,  $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\theta}$ . On retrouve la loi de conservation du moment cinétique. L'impulsion généralisée correspondant à un angle est égale à la projection du moment cinétique sur l'axe de rotation.

**Systèmes isolés** : un système est dit isolé si le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps. Autrement dit,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0} \\ &= \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_i \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{constante.} \quad (2.16)$$



$h(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  s'appelle la *fonction hamiltonienne*. Sa valeur correspond à l'énergie.

*Exemple* : Supposons que  $V$  ne dépende pas des vitesses, et que l'énergie cinétique dépende du carré des vitesses.

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \\ \Rightarrow h &= 2T - L = 2T - T + V = T + V. \end{aligned}$$

On retrouve la conservation de l'énergie mécanique.

*Application* : Pendule sphérique.

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mgr \cos \theta$$

- $L$  ne dépend pas explicitement du temps  
 $\Rightarrow E = T + V$  est conservé.
- $L$  ne dépend pas explicitement de  $\phi$   
 $\Rightarrow L_z$  est conservé.

## 2.3 Petites oscillations dans les systèmes lagrangiens

### 2.3.1 Oscillateur harmonique

Considérons le problème classique d'une masse  $m$  attachée à un ressort vertical de raideur  $k$  plongée dans le champ de pesanteur. Si l'on désigne par  $y$  l'ordonnée de la masse, et par  $y_0$  la position de la masse lorsque le ressort est au repos, l'énergie cinétique est donnée par:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

et l'énergie potentielle est donnée par:

$$V = \frac{1}{2}k(y - y_0)^2 + mgy$$

La position d'équilibre du système est définie par la condition  $y = y_* = \text{constante}$ . Or, d'après les équations de Lagrange,  $y(t)$  est solution de:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

La position d'équilibre  $y = y_*$  est donc définie par la condition:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ \Rightarrow k(y_* - y_0) + mg &= 0 \\ \Rightarrow y_* &= y_0 - \frac{mg}{k} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si l'on définit une nouvelle coordonnée  $x = y - y_*$ , il vient:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ V &= \frac{1}{2}k(x + y_* - y_0)^2 + mg(x + y_*) \\ &= \frac{1}{2}k(y_* - y_0)^2 + kx(y_* - y_0) + \frac{1}{2}kx^2 + mg(x + y_*) \\ &= \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + x[k(y_* - y_0) + mg] + mgy_* + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= mgy_0 - \frac{(mg)^2}{2k} + \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

A la constante  $mgy_0 - \frac{(mg)^2}{2k}$  près, qu'on peut laisser tomber puisque les équations de Lagrange de font intervenir que les dérivées du lagrangien, on a:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

d'où l'équation du mouvement

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Cherchons une solution complexe  $z(t)$  sous la forme:

$$z = z_0 e^{i\omega t}.$$

Il vient:

$$(-m\omega^2 + k)z_0 e^{i\omega t} = 0,$$

d'où

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad z_0 \text{ quelconque.}$$

Mais si  $z(t) \in \mathbb{C}$  est solution, sa partie réelle est solution puisque les coefficients de l'équation différentielle sont réels. La solution générale s'écrit donc:

$$x(t) = \operatorname{Re}z_0 \cos \omega t - \operatorname{Im}z_0 \sin \omega t$$

Les coefficients de  $\cos \omega t$  ( $\operatorname{Re}z_0$ ) et de  $\sin \omega t$  ( $-\operatorname{Im}z_0$ ) sont des réels qui sont déterminés par les conditions initiales  $x(t=0)$  et  $\dot{x}(t=0)$ .

Nous allons voir que ce calcul peut être généralisé au problème des oscillations dans les systèmes à  $N$  degrés de liberté, et que de tels systèmes peuvent se ramener à une collection d'oscillateurs harmoniques découplés.

### 2.3.2 Systèmes à plusieurs degrés de liberté

De nombreux systèmes peuvent être décrits comme un ensemble de points matériels effectuant de petites oscillations autour de leur position d'équilibre. Par exemple, un solide est un arrangement régulier d'atomes qui occupent en moyenne une position bien déterminée dans le cristal, et qui effectuent de petites oscillations autour de cette position. Les interactions qui conduisent à cette position d'équilibre sont la résultante de plusieurs contributions, mais la nature des petites oscillations ne dépend pas des détails de l'interaction. En effet, si l'on désigne par  $q_1, \dots, q_n$  les degrés de liberté de ce système (par exemple les  $3N$  coordonnées dans un cristal comportant  $N$  atomes), la condition d'équilibre en  $q_{1*}, \dots, q_{n*}$  impose que  $\frac{\partial V}{\partial q_1} = \dots = \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0$  en ce point. Le développement de  $V$  autour de la position d'équilibre s'écrit donc :

$$V(\vec{q}) = V(\vec{q}_*) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} (q_i - q_{i*})(q_j - q_{j*}). \quad (2.19)$$

Si on définit  $x_i = q_i - q_{i*}$ , et si on note  $k_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}_*}$ , l'énergie potentielle s'écrit, à une constante près,

$$V(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j. \quad (2.20)$$

Par ailleurs, l'énergie cinétique peut en général s'écrire

$$T(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j. \quad (2.21)$$

Dans le cas de particules de masses  $m_1, \dots, m_n$ , on a bien sûr  $m_{ij} = m_i \delta_{ij}$ , mais l'étude d'oscillations dans d'autres systèmes peut conduire à une forme quadratique qu'on suppose symétrique ( $m_{ij} = m_{ji}$ ).

Les petites oscillations sont donc décrites par le lagrangien

$$L(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = T(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) - V(x_1, \dots, x_n). \quad (2.22)$$

Pour déterminer les équations de Lagrange, regroupons les termes contenant un indice  $l$  donné :

$$T : \quad \frac{1}{2} \sum_{j \neq l} m_{lj} \dot{x}_l \dot{x}_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq l} m_{il} \dot{x}_i \dot{x}_l + \frac{1}{2} m_{ll} \dot{x}_l^2 \quad (2.23)$$

$$V : \quad \frac{1}{2} \sum_{j \neq l} k_{lj} x_l x_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq l} k_{il} x_i x_l + \frac{1}{2} k_{ll} x_l^2 \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} &= \frac{1}{2} \sum_{j \neq l} m_{lj} \dot{x}_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq l} m_{il} \dot{x}_i + m_{ll} \dot{x}_l \\ &= \sum_j m_{jl} \dot{x}_j \quad (m_{ij} = m_{ji}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

De même,  $\frac{\partial L}{\partial x_l} = -\sum_j k_{jl}x_j$  ( $k_{ij} = k_{ji}$  car c'est la dérivée seconde du potentiel). Les équations de Lagrange s'écrivent donc :

$$\sum_j m_{jl}\ddot{x}_j + \sum_j k_{jl}x_j = 0 \quad (l = 1, \dots, n). \quad (2.26)$$

Cherchons s'il existe des solutions complexes de la forme :

$$\vec{z} = \vec{A} e^{i\omega t}, \quad \omega \text{ réel}. \quad (2.27)$$

Les équations de Lagrange conduisent au système

$$\begin{aligned} -\sum_j m_{jl}A_j\omega^2 + \sum_j k_{jl}A_j &= 0 \quad (l = 1, \dots, n), \\ \text{soit } \sum_j (-m_{jl}\omega^2 + k_{jl})A_j &= 0 \quad (l = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Vu que le membre de droite est nul, ce système linéaire n'a de solution non nulle que si son déterminant est nul, soit :

$$\det(-\omega^2 M + K) = 0, \quad (2.29)$$

où  $M$  et  $K$  sont des matrices ( $n \times n$ ) définies par  $M_{ij} = m_{ij}$ ,  $K_{ij} = k_{ij}$ . Par ailleurs  $\omega$  sera réel si  $\omega^2$  est réel et positif.

**Proposition 2.1.**  $\omega^2$  est réel et positif.

*Démonstration :*  $\vec{q}_*$  minimal  $\Rightarrow \sum_{i,j} k_{ij}a_i a_j$  est une forme quadratique définie positive.

De même, l'énergie cinétique est une forme quadratique définie positive. Mais

$$\begin{aligned} \sum_j (-m_{jl}\omega^2 + k_{jl})A_j &= 0, \\ \Rightarrow A_l^* \sum_j (-m_{jl}\omega^2 + k_{jl})A_j &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{j,l} (-m_{jl}\omega^2 + k_{jl})A_l^* A_j &= 0 \\ \Rightarrow \omega^2 &= \frac{\sum_{j,l} k_{jl}A_l^* A_j}{\sum_{j,l} m_{jl}A_l^* A_j}. \end{aligned}$$

Mais si une forme quadratique est définie positive *et* symétrique, alors

$$\sum_{i,j} k_{ij}A_i^* A_j \geq 0.$$

En effet, avec  $A_i = a_i + ib_i$ ,  $A_j = a_j + ib_j$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} k_{ij} A_i^* A_j &= \sum_{i,j} k_{ij} (a_i - ib_i)(a_j + ib_j) \\ &= \underbrace{\sum_{i,j} k_{ij} a_i a_j}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{i,j} k_{ij} b_i b_j}_{\geq 0} + i \underbrace{\sum_{i,j} k_{ij} a_i b_j - \sum_{i,j} k_{ij} a_j b_i}_{=0, \text{ puisque } k_{ij} = k_{ji}} \end{aligned}$$

De même,  $\sum_{i,j} m_{ij} A_i^* A_j > 0$ . C.Q.F.D.

Soient  $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$  les solutions de  $\det(-M\omega^2 + K) = 0$ , et désignons par  $\vec{A}^i$  une solution réelle associée à  $\omega_i^2$ .  $\vec{A}^i$  peut être choisi réel car tous les coefficients du système sont réels. La solution générale dans  $\mathbb{C}^n$  peut donc être écrite

$$\vec{z} = \sum_i c_i \vec{A}^i e^{i\omega_i t}. \quad (2.30)$$

Pour obtenir une solution réelle, il suffit de prendre la partie réelle .

$$\vec{x} = \sum_i (\operatorname{Re}(c_i) \cos \omega_i t - \operatorname{Im}(c_i) \sin \omega_i t) \vec{A}^i. \quad (2.31)$$

### Coordonnées normales

On va maintenant démontrer que, si les fréquences sont toutes différentes, le système est équivalent à une collection d'oscillateurs harmoniques indépendants de fréquence  $\omega_i$ . D'après les équations du mouvement, on a :

$$\sum_j (-m_{jl}\omega_i^2 + k_{jl}) \left( \vec{A}^i \right)_j = 0, \quad l = 1, \dots, n$$

Posons  $\Delta_{ij} = \left( \vec{A}^j \right)_i$ . Pour deux fréquences  $\omega_p$  et  $\omega_q$  ( $p \neq q$ ), on peut donc écrire :

$$\begin{cases} \sum_i (-\omega_p^2 m_{ij} + k_{ij}) \Delta_{ip} = 0, & j = 1, \dots, n \\ \sum_j (-\omega_q^2 m_{ji} + k_{ji}) \Delta_{jq} = 0, & i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.32)$$

En multipliant la première (resp. la seconde) par  $\Delta_{jq}$  (resp.  $\Delta_{ip}$ ) et en faisant la somme sur  $j$  (resp.  $i$ ), il vient :

$$\begin{aligned} \sum_j \Delta_{jq} \times \sum_i (-\omega_p^2 m_{ij} + k_{ij}) \Delta_{ip} &= 0 \\ \sum_i \Delta_{ip} \times \sum_j (-\omega_q^2 m_{ji} + k_{ji}) \Delta_{jq} &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Si on fait la différence des équations on trouve, puisque  $M$  et  $K$  sont symétriques :

$$\begin{aligned} (\omega_q^2 - \omega_p^2) \sum_{i,j} m_{ij} \Delta_{ip} \Delta_{jq} &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i,j} m_{ij} \Delta_{ip} \Delta_{jq} &= 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

puisque les fréquences sont par hypothèse toutes différentes. Sous forme matricielle, cette équation s'écrit :

$$\left( {}^t \Delta M \Delta \right)_{pq} = 0 \quad (p \neq q). \quad (2.35)$$

Par ailleurs, on peut encore choisir une condition de normalisation sur les vecteurs  $\vec{A}^p$ . Si on impose la condition de normalisation  $\sum_{i,j} \vec{A}_i^p m_{ij} \vec{A}_j^p = 1$ , cela conduit à la condition  $\sum_{i,j} \Delta_{ip} m_{ij} \Delta_{jp} = 1$  sur la matrice  $\Delta$ , qui s'écrit sous forme matricielle

$$\left( {}^t \Delta M \Delta \right)_{pp} = 1. \quad (2.36)$$

Autrement dit, la matrice  $\Delta$  satisfait la relation :

$${}^t \Delta M \Delta = \mathbb{1}. \quad (2.37)$$

L'équation  $\sum_{i,j} \Delta_{jq} (-m_{ij} \omega_p^2 + k_{ij}) \Delta_{ip} = 0$  conduit à

$$\sum_{i,j} \Delta_{jq} k_{ij} \Delta_{ip} = \omega_p^2 \sum_{i,j} \Delta_{jq} m_{ij} \Delta_{ip} \quad (2.38)$$

soit, sous forme matricielle,

$$\left( {}^t \Delta K \Delta \right)_{pq} = \omega_p^2 \delta_{pq} \quad (2.39)$$

ou encore

$${}^t \Delta K \Delta = \Omega \quad (2.40)$$

où l'on a introduit la matrice  $\Omega$  définie par

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^2 \end{pmatrix}.$$

Si on définit de nouvelles coordonnées  $Q_i$  par

$$x_i = \sum_j \Delta_{ij} Q_j \text{ soit } \vec{x} = \Delta \overrightarrow{Q} \quad (2.41)$$

le lagrangien s'écrit donc

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} \left( {}^t \dot{\vec{x}} M \dot{\vec{x}} - {}^t \vec{x} K \vec{x} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( {}^t \dot{\vec{Q}} \Delta M \Delta \dot{\vec{Q}} - {}^t \vec{Q} \Delta K \Delta \vec{Q} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( {}^t \dot{\vec{Q}} \vec{Q} - {}^t \vec{Q} \Omega \vec{Q} \right) \\
L &= \frac{1}{2} \sum_i \left( \dot{Q}_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2 \right) \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Le lagrangien est la somme de langrangiens indépendants. Les  $Q_i$  sont appelés *coordonnées normales*.

## 2.4 Introduction au calcul des variations

Les équations de Lagrange ont la même forme que les équations d'Euler établies par Euler dans le cadre plus général du calcul des variations. Cette remarque est à l'origine d'une nouvelle formulation de la mécanique. Commençons donc par établir cette propriété.

Considérons le problème suivant : soit une fonctionnelle  $I[y]$ , c'est-à-dire une fonction de l'espace des fonctions dérivables dans  $\mathbb{R}$ , qui à une fonction  $y(x)$  associe le nombre réel

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x) \tag{2.43}$$

où  $x_1, x_2$  sont des bornes d'intégration fixées une fois pour toutes, et  $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ .

On cherche la fonction  $y(x)$  qui rend  $I[y]$  extrémal avec les contraintes

$$\left. \begin{array}{l} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{array} \right\} \quad y_1, y_2 \text{ donnés.} \tag{2.44}$$

On définit par ailleurs  $\partial_1 F =$  dérivée par rapport à la première variable et  $\partial_2 F =$  dérivée par rapport à la seconde.

Supposons que  $y(x)$  soit la solution du problème, et considérons la famille de fonctions  $z(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x)$ , où  $\eta(x)$  est une fonction dérivable quelconque de  $x$  qui satisfait  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ .

Définissons par ailleurs

$$\tilde{I}(\alpha) \equiv I[z(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} dx F \left( z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x \right). \tag{2.45}$$

Si  $I$  est extrémal pour  $y(x)$  alors

$$\left. \frac{d\tilde{I}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (2.46)$$

Or,

$$\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \partial_1 F \left( z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x \right) \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \partial_2 F \left( z, \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial x} \right]. \quad (2.47)$$

Pris en  $\alpha = 0$ , on obtient donc :

$$\left. \frac{d\tilde{I}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx [\partial_1 F(y, y', x)\eta(x) + \partial_2 F(y, y', x)\eta'(x)]. \quad (2.48)$$

On intègre le deuxième terme par partie :

$$\int_{x_1}^{x_2} dx [\partial_2 F(y, y', x)\eta'(x)] = [\partial_2 F(y, y', x)\eta(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{d}{dx} \partial_2 F(y, y', x) \right] \eta(x). \quad (2.49)$$

Le terme tout intégré est nul puisque  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  et la condition  $\left. \frac{d\tilde{I}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \partial_1 F(y, y', x) - \frac{d}{dx} \partial_2 F(y, y', x) \right] \eta(x) &= 0 \quad \forall \eta(x) \\ \Rightarrow \quad \partial_1 F(y, y', x) - \frac{d}{dx} [\partial_2 F(y, y', x)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

ou, avec les notations qui font apparaître les variables pour les dérivées partielles, et en changeant le signe :

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \right] - \frac{\partial F}{\partial y} = 0} \quad \text{Equation d'Euler} \quad (2.51)$$

S'il y a plusieurs variables  $y_1, \dots, y_n$ , il suffit de considérer successivement les fonctions d'essai

$$\begin{cases} z_i(x) = y_i(x) + \alpha\eta(x) \\ z_j(x) = y_j(x) \text{ si } j \neq i \end{cases} \quad (2.52)$$

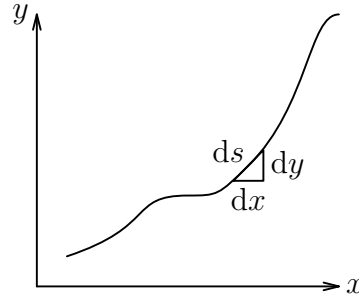
pour arriver aux équations d'Euler :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y'_i} \right] - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.53)$$

*Exemple* : Essayons de déterminer le chemin le plus court pour aller d'un point  $A(x_1, y_1)$  à un point  $B(x_2, y_2)$  dans le plan. La distance le long d'une courbe  $\mathcal{C}$  définie par  $y(x)$  avec  $y(x_1) = y_1$  et  $y(x_2) = y_2$  est donnée par



$$\int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2}.$$



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ (Pythagore)}$$

La longueur du chemin le long de la courbe  $y(x)$  peut donc se mettre sous la forme

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x) \text{ avec } F(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

L'équation d'Euler conduit à la condition

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c = \text{constante} \\ \Rightarrow y' &= \frac{\pm c}{\sqrt{1 - c^2}} = a = \text{constante} \\ \Rightarrow y &= ax + b. \quad \text{C'est une droite !} \end{aligned}$$

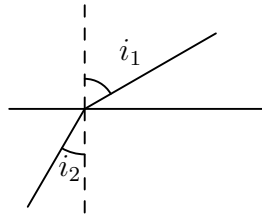
## 2.5 Le principe de moindre action

Les équations de Newton ou de Lagrange permettent de déterminer l'évolution d'un système si l'on connaît à l'instant initial les positions et les vitesses des particules. Dans l'espace à  $3N$  dimensions des positions des particules, l'évolution définit donc des trajectoires.

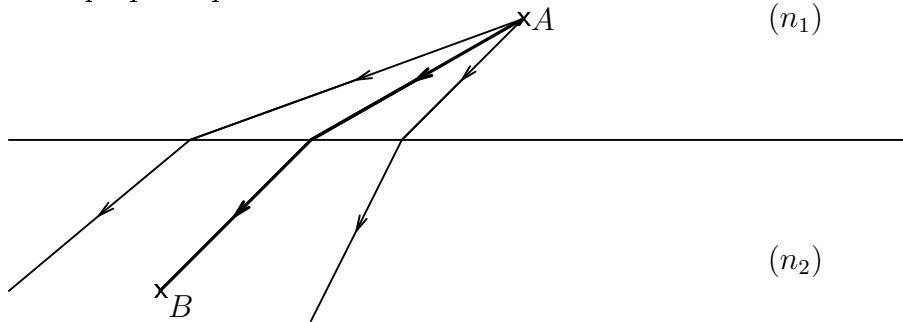
On peut dès lors se poser la question suivante : considérons deux points sur une trajectoire donnée entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  caractérisés par la donnée de  $\{q_i^1\}$  et  $\{q_i^2\}$ . Peut-on caractériser les trajectoires physiques par un principe global qui consiste à les comparer aux autres trajectoires "possibles" (ou virtuelles) du système ? Autrement dit, si on considère l'ensemble des fonctions  $\{q_i(t)\}$  telles que  $q_i(t_1) = q_i^1$  et  $q_i(t_2) = q_i^2$ , est-ce qu'on peut déterminer directement lesquelles correspondent aux trajectoires physiques sans calculer l'évolution du système ? La réponse à cette question très simple est à l'origine de la formulation la plus générale et la plus compacte des lois de la mécanique classique.

Une telle façon de formuler les lois de la physique est très générale. Elle a pour la première fois été utilisée dans le cadre de l'optique géométrique où elle est connue sous le nom de principe de Fermat, qui stipule que le chemin optique  $\int_1^2 n(\vec{r}) ds$  le long d'une trajectoire est minimum. Dans ce cadre, la différence entre les deux points de vue (local ou global) est facile à illustrer. Considérons un dioptré plan séparant deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$ . Comment trouver la trajectoire de la lumière pour aller d'un point  $A$  dans (1) à un point  $B$  dans (2) ?

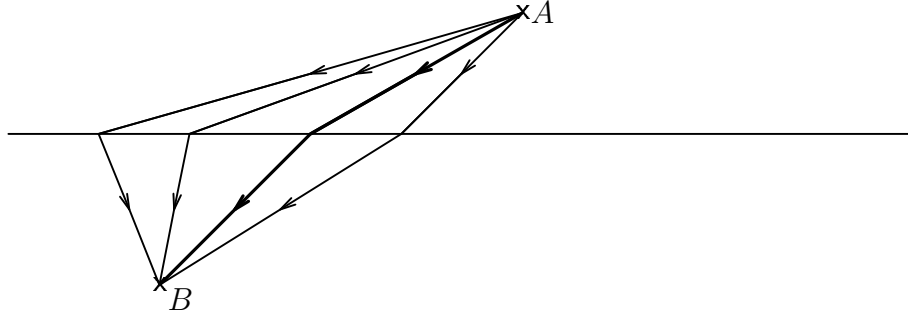
*Formulation locale* : la lumière se propage de façon rectiligne dans un milieu d'indice homogène. A la séparation entre 2 milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$ , les angles d'incidence satisfont la loi de Descartes,  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$



Dans la formulation locale, on compare toutes les trajectoires issues de  $A$ , et on cherche celle qui passe par  $B$



*Formulation globale* : On calcule le chemin optique le long de toutes les trajectoires passant par  $A$  et  $B$ . La trajectoire physique est celle qui minimise le chemin optique :



On démontre aisément que celle qui minimise le chemin optique satisfait la loi de Descartes.

L'équivalent du chemin optique en mécanique s'appelle l'*action*. Elle est définie de la façon suivante.

*Définition* : l'*action* est une *fonctionnelle* des trajectoires définie par

$$S[\{q_i(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) dt.$$

Cette fonctionnelle permet de formuler les lois de la mécanique à l'aide d'un principe du même type que le principe de Fermat en optique.

**Principe de moindre action** : dans l'ensemble des trajectoires possibles allant d'une configuration donnée  $\{q_1^1, \dots, q_n^1\}$  à l'instant  $t_1$  à une configuration donnée  $\{q_1^2, \dots, q_n^2\}$  à l'instant  $t_2$ , l'action est extrémale pour la trajectoire physique.

*Remarque* : il peut en principe y avoir plusieurs trajectoires qui rendent l'action extrémale, mais en pratique il n'y en a en général qu'une. Par ailleurs, l'extremum est en général un minimum, d'où le nom de principe de *moindre* action.

**Equivalence avec les autres formulations** : d'après les résultats de la section précédente relatifs au calcul des variations, la fonctionnelle  $S[\{q_i(t)\}]$  sera extrémale si les trajectoires  $q_i(t)$  satisfont les équations d'Euler correspondantes. Or, le lagrangien  $L$  joue le rôle de la fonction  $F$ , le temps  $t$  celui de la variable  $x$ , et les trajectoires  $q_i(t)$  celui des fonctions  $y_i(x)$ . Les équations d'Euler s'écrivent donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1 \dots, n.$$

On reconnaît bien sûr les équations de Lagrange. Le principe de moindre action est donc bien équivalent aux équations de Lagrange, donc à la formulation newtonienne de la mécanique.

Bien qu'il ait été introduit pour des raisons plus philosophiques que scientifiques, le principe de moindre action s'est révélé être une formulation très utile de la mécanique dans un certain nombre de circonstances (contraintes, transformations canoniques, ...).

## 2.6 Théorème des extremums liés

Considérons une fonction à 2 variables  $F(x, y)$  dont on cherche le minimum sous la contrainte  $f(x, y) = 0$ . Quelles sont les équations qui conduisent au minimum ?

*Réponse* : Il suffit de minimiser la fonction de 3 variables

$$H(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda f(x, y). \quad (2.54)$$

Les valeurs  $x_{\min}, y_{\min}$  sont la solution du problème,  $\lambda$  s'appelle un *multiplieur de Lagrange*.

*Démonstration* :

Minimiser  $H$  veut dire qu'il faut satisfaire les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 & \Leftrightarrow & \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 0 & \Leftrightarrow & \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 & \Leftrightarrow & f(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2.55)$$

La troisième équation n'est rien d'autre que la contrainte. Il faut donc démontrer qu'il existe  $\lambda$  tel que les 2 premières conditions soient vérifiées.

*Première méthode* :

Supposons que la contrainte, qui définit une courbe dans le plan  $(x, y)$ , conduise à une courbe paramétrée  $x(z), y(z)$ . On doit minimiser  $F(x(z), y(z))$ . Alors

$$\frac{d}{dz} F \equiv \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dz} = 0. \quad (2.56)$$

Mais  $f(x(z), y(z)) = 0$ . En dérivant par rapport à  $z$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dz} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dz} &= -\frac{dx}{dz} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\frac{dF}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial F}{\partial y} \left( -\frac{dx}{dz} \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} \right) = 0. \quad (2.58)$$

Si  $\frac{dx}{dz} \neq 0$  (si  $x = \text{constante}$ , c'est trivial !), on en déduit .

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \quad (2.59)$$

Si on rajoute une inconnue  $\lambda$  satisfaisant

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}}, \quad (2.60)$$

le système constitué de cette équation et de l'équation précédente est équivalent au système

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.61)$$

C.Q.F.D.

*Deuxième méthode :*

Si  $F$  est minimum, alors

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y = 0, \quad (2.62)$$

où le déplacement  $(\delta x, \delta y)$  doit être en accord avec la contrainte.

Or, d'après la contrainte  $f(x, y) = 0$ , on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0. \quad (2.63)$$

Cette équation définit les déplacements virtuels.

Cette équation est équivalente à

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0 \quad (\forall \lambda). \quad (2.64)$$

Avec la condition de minimisation, on en déduit

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \left( \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta y = 0 \quad (2.65)$$

Supposons que  $\lambda$  satisfasse l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Le déplacement  $\delta y$  peut être choisi comme déplacement arbitraire. On doit donc avoir

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

C.Q.F.D.

## 2.7 Principe de moindre action et contraintes holonômes

Supposons qu'un système soit décrit par  $k$  contraintes holonômes :

$$f_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

ou, en termes de  $3N$  coordonnées  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 3N$  :

$$f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Les équations de Lagrange nous permettent d'écrire directement les équations du mouvement en termes des coordonnées généralisées. Mais comment s'y prendre si on ne peut pas inverser explicitement les contraintes ? L'approche variationnelle permet de traiter ce problème.

Pour un déplacement virtuel, on a :

$$\delta f_j = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad j = 1, \dots, k \quad (2.66)$$

$$\Rightarrow \lambda_j \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (\forall \lambda_j) \quad (2.67)$$

$$\Rightarrow \sum_j \lambda_j \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (\forall \lambda_j) \quad (2.68)$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \left( \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i = 0 \quad (\forall \lambda_j(t)). \quad (2.69)$$

Par ailleurs, d'après le calcul des variations, si l'on ajoute un petit déplacement  $\delta x_i(t)$  tel que  $\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$  à une trajectoire  $\{x_i(t)\}$  donnée, la variation de l'action au premier ordre en  $\delta x_i$  est donnée par

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \delta x_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) dt. \quad (2.70)$$

*Démonstration* : considérons des déplacements de la forme  $\delta x_i(t) = \alpha_i \eta_i(t)$ , avec  $\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0$ , et définissons la fonction

$$\tilde{S}(\alpha_1, \dots, \alpha_{3N}) \equiv S[\{x_i(t) + \alpha_i \eta_i(t)\}].$$

Pour  $\alpha_i$  petit, le développement de Taylor ou premier ordre s'écrit

$$\tilde{S}(\alpha_1, \dots, \alpha_{3N}) = \tilde{S}(0, \dots, 0) + \sum_i \alpha_i \left. \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_i=0}.$$

Mais, d'après le calcul des variations,

$$\left. \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_i=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) \eta_i(t) dt.$$

On en déduit que  $\delta S \equiv \tilde{S}(\alpha_1, \dots, \alpha_{3N}) - \tilde{S}(0, \dots, 0)$  est donné par

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \alpha_i \eta_i(t) \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) dt.$$

C.Q.F.D.

Le principe de moindre action stipule que, pour un déplacement possible du système,  $\delta S = 0$ . Autrement dit, si  $\delta x_i(t)$  est un déplacement virtuel satisfaisant  $\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$ , on doit avoir

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \delta x_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) dt = 0.$$

Si on rajoute cette équation à l'équation (2.69), valable pour tout déplacement virtuel, donc en particulier pour tout déplacement virtuel satisfaisant  $\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$ , il vient

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \delta x_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) dt = 0. \quad (2.71)$$

Supposons que les  $k$  fonctions  $\lambda_j$  soient choisies de telle façon que

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 3N - k + 1, \dots, 3N. \quad (2.72)$$

Le principe de moindre action s'écrit alors

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N-k} \delta x_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) dt = 0. \quad (2.73)$$

Mais comme on a  $3N - k$  degrés de liberté, on peut faire varier les  $\delta x_i$  indépendamment les uns des autres. On en déduit

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 3N - k. \quad (2.74)$$

Finalement, les  $3N + k$  inconnues  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 3N$  et  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , sont données par les équations

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, & i = 1, \dots, 3N \\ f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0, & j = 1, \dots, k. \end{cases} \quad (2.75)$$

Les  $\lambda_i$  s'appellent des *multiplicateurs de Lagrange*.

Par analogie avec le problème des extremums liés, ce résultat peut être reformulé de la façon suivante : un problème de mécanique à  $3N$  degrés de liberté  $x_1, \dots, x_{3N}$  décrit par un lagrangien  $L$  et  $k$  contraintes  $f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ , est équivalent à un problème sans contrainte à  $3N + k$  degrés de liberté  $x_1, \dots, x_{3N}, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  décrit par le lagrangien

$$\tilde{L} = L + \sum_j \lambda_j f_j.$$

En effet, comme  $\tilde{L}$  ne dépend pas explicitement de  $\dot{\lambda}_j$ , les équations pour  $x_i$  redonnent les  $3N$  premières équations, et les équations pour  $\lambda_j$  redonnent les  $k$  dernières.

*Remarques :*

- Les  $\lambda_j$  sont des fonctions de  $t$ , et non des constantes comme dans le problème des extremums liés.
- Ces équations sont valables dans tout système de coordonnées, et non pas simplement en coordonnées cartésiennes.

## 2.8 Equations de Lagrange et forces de contrainte

Au début de ce chapitre, nous avons établi les équations de Lagrange avec l'objectif de se débarrasser des forces de contraintes. Il peut néanmoins être nécessaire de déterminer ces forces de contraintes, par exemple pour évaluer la résistance d'un dispositif lors du mouvement d'un système contraint.



Mais si l'on décrit les contraintes par un champ de force  $\vec{R}_i$ , on peut reproduire le raisonnement qui conduit aux équations de Lagrange à condition de garder  $3N$  coordonnées. Si les forces autres que les forces de contrainte dérivent d'un potentiel  $V$ , on en déduit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = R_{ix} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = R_{iy} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_i} = R_{iz} \end{cases} \quad (2.76)$$

On peut également faire un changement de variables conduisant à  $3N$  nouvelles variables  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, 3N$ . Les *forces de contrainte généralisées* sont définies par  $R_j \equiv \sum_i \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ . Les équations de Lagrange s'écrivent alors :

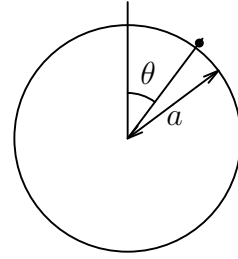
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = R_j, \quad j = 1, \dots, 3N. \quad (2.77)$$

La détermination des forces de contrainte peut se faire de deux façons, suivant que l'on peut ou non inverser les  $k$  contraintes holonômes.

**1<sup>er</sup> cas** : supposons qu'on puisse inverser les  $k$  contraintes holonômes. Il existe donc un changement de variables  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, 3N$ , tel que  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, 3N - k$  soient les coordonnées généralisées. Dans ce cas,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$  pour  $j = 1, \dots, 3N - k$ , et les seules composantes non nulles des forces de contrainte généralisées sont les  $R_j$ ,  $j = 3N - k + 1, \dots, 3N$ . Pour calculer ces composantes, il suffit alors de procéder de la façon suivante :

1. Calculer le lagrangien  $L(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)$  en fonction des coordonnées généralisées. Résoudre le problème en termes des  $3N - k$  coordonnées généralisées  $q_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, 3N - k$ .
2. Déterminer l'expression  $\tilde{L}(q_1, \dots, q_{3N}, t)$  du lagrangien en fonction de *toutes* les variables  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, 3N$ .
3. Calculer  $R_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j}$  pour  $j = 1, \dots, 3N$  en utilisant la solution  $q_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, 3N - k$  et les contraintes.

*Exemple* : considérons un point matériel qui glisse à la surface d'un cylindre. Si le mouvement a lieu dans un plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$  du cylindre, les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  sont bien adaptées : la contrainte s'écrit  $r = a$ , et la seule coordonnée généralisée est  $\theta$ .



1.  $L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga \cos \theta$  est indépendant du temps  $\Rightarrow T + V = \text{constante}$ .

2.  $L = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mgr \cos \theta$ .

- 3.

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \\ &= -ma\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad \text{car } \ddot{r} = 0. \end{aligned}$$

Si à  $t = 0$ ,  $\theta = 0$  et  $\dot{\theta} = 0$ , on a

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga \cos \theta = mga,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_r &= -ma\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \\ &= 2mg(\cos \theta - 1) + mg \cos \theta \\ &= mg(3 \cos \theta - 2) \end{aligned}$$

$R_r > 0$  tant que  $\cos \theta > \frac{2}{3}$ . Au delà de  $\theta = \text{Arccos} \left( \frac{2}{3} \right)$  la bille n'est plus en contact avec la sphère.

**2<sup>ème</sup> cas** : si l'on ne peut pas inverser les contraintes holonômes, il faut introduire des multiplicateurs de Lagrange. Les seconds membres des équations de Lagrange écrites à l'aide des multiplicateurs de Lagrange correspondent aux composantes des forces de contrainte :

$$R_i = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}.$$

## 2.9 Principe de moindre action et contraintes plus générales

Une contrainte holonôme

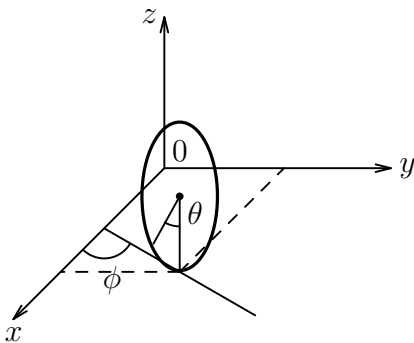
$$f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0$$

conduit, en dérivant par rapport au temps, à une contrainte du type

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0. \quad (2.78)$$

Dans certains cas, les contraintes s'écrivent directement comme des relations entre les vitesses, mais sans que les coefficients soient reliés entre eux par le fait d'être des dérivées partielles.

*Exemple* : Une roue verticale roule sans glisser dans le plan horizontal.



La vitesse du point de contact doit être nulle :

$$\begin{cases} \dot{x} - R \cos \phi \dot{\theta} = 0 \\ \dot{y} - R \sin \phi \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Un tel problème ne peut pas se décrire à l'aide de fonctions  $f_j$ . En effet, comme il n'y a pas de terme en  $\dot{\phi}$ , les  $f_j$  devraient être indépendantes de  $\phi$ . Mais le coefficient de  $\dot{\theta}$  dépend de  $\phi$ .

De telles contraintes sont non holonomes. Elles s'écrivent de façon générale

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^j \dot{x}_i + a_0^j = 0, \quad (2.79)$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^j \frac{dx_i}{dt} + a_0^j = 0,$$

soit

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^j dx_i + a_0^j dt = 0. \quad (2.80)$$

Pour résoudre ce problème, il est traditionnel d'introduire des déplacements virtuels satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^j \delta x_i = 0, \quad (2.81)$$

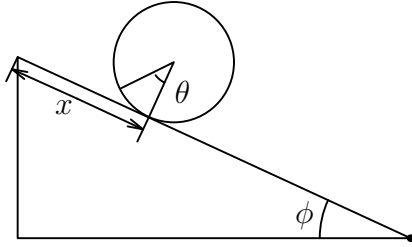
l'idée étant que ces déplacements virtuels se font à temps constant ( $dt = 0$ ), et de faire l'hypothèse que l'action est extrémale vis-à-vis de ces déplacements virtuels. Le

calcul fait pour les contraintes holonômes se transpose sans aucune modification, et on obtient les équations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_j \lambda_j a_i^j, & i = 1, \dots, 3N \\ \sum_{i=1}^{3N} a_i^j \dot{x}_i + a_0^j = 0, & j = 1, \dots, k. \end{cases} \quad (2.82)$$

Ces équations sont parfois appelées équations de Lagrange de *première espèce*.

*Exemple* : Un cylindre roule sans glisser sur un plan incliné.



*Contrainte* :  $r\dot{\theta} = \dot{x}$

*Remarque* : cette contrainte est intégrable et on pourrait aisément se débarrasser d'une variable.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 \\ V &= Mg(l-x)\sin\phi, \quad l = \text{longueur du plan incliné.} \end{aligned}$$

La contrainte se réécrit :

$$r\dot{\theta} - \dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_\theta = r, \quad a_x = -1$$

$$L = T - V$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = Mr^2\dot{\theta} & \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = Mr^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} & \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = M\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = +Mg\sin\phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot{x} - Mg\sin\phi = -\lambda & (2.83) \\ Mr^2\ddot{\theta} = \lambda r & (2.84) \end{cases}$$

$$r\dot{\theta} = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad r\ddot{\theta} = \ddot{x}$$

$$(2.83) \quad \Rightarrow \quad M\ddot{x} = \lambda$$

$$(2.84) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{g \sin \phi}{2}, & \lambda &= \frac{Mg \sin \phi}{2} \\ \ddot{\theta} &= \frac{g \sin \phi}{2r} \end{aligned}$$

*Calcul direct :*

$$r\theta + C = x \quad \Rightarrow \quad \text{on élimine } \theta.$$

$$\begin{cases} T = M\dot{x}^2 \\ V = Mg(l - x) \sin \phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2M\ddot{x} = Mg \sin \phi \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{g \sin \phi}{2}.$$

*Remarque :* Les déplacements virtuels pour une contrainte du type

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^j \dot{x}_i + a_0^j$$

sont *définis* par

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^j \delta x_i = 0.$$

La minimisation de l'action pour ces déplacements virtuels conduit aux équations de Lagrange de première espèce.

On peut aussi aborder le problème différemment et se poser la question : quelles sont les équations satisfaites par  $x_i(t)$  si on minimise l'action en se donnant simplement la contrainte ? Ce problème mathématique est bien posé, et la solution générale stipule que pour minimiser l'intégrale de  $F(x, y, y')$  sous la contrainte  $G(x, y, y') = 0$ , il suffit de minimiser

$$F(x, y, y') + \lambda(x)G(x, y, y')$$

(démonstration non donnée).

Pour une contrainte holonôme du type  $G(x, y) = 0$  (pas de dérivée), l'équation d'Euler-Lagrange conduit à :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda \frac{\partial G}{\partial y}. \quad (2.85)$$

On retrouve le résultat annoncé. Ce résultat se généralise immédiatement à plusieurs variables. On en déduit que pour des contraintes holonômes, le principe de moindre

action restreint aux trajectoires satisfaisant la contrainte conduit aux équations de Lagrange de première espèce. Cela n'est pas étonnant. Dans le cas de contraintes holonomes, les fonctions  $(x_1 + \delta x_1, \dots, x_N + \delta x_N)$  satisfont la contrainte dès que  $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0$ . Autrement dit, la condition que nous avons établie est une condition nécessaire.

Par contre, pour une contrainte non holonome du type  $f(x, y)y' + g(x, y) = 0$ , l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{d}{dx} [\lambda(x)f(x, y)] - \lambda \left[ \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial y} \right] = 0. \quad (2.86)$$

Dans le cas de plusieurs variables, il faut rajouter un multiplicateur de Lagrange par contrainte. En général, ces équations ne sont pas équivalentes aux équations de Lagrange de première espèce. On peut néanmoins démontrer que dans un certain nombre de cas les solutions des équations de Lagrange de première espèce sont aussi solutions des équations (2.86). L'expérience prouve que les équations de Lagrange de première espèce conduisent à une description satisfaisante des forces de contrainte. C'est elles qui sont en général utilisées.

## 2.10 Contraintes intégrales

Les contraintes rencontrées dans le contexte des équations de Lagrange sont en général du type précédemment évoqué. Mais on rencontre souvent des contraintes plus générales dans d'autres contextes. En particulier, on doit souvent résoudre des problèmes qui consistent à extrémiser

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx, \quad (y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2)$$

sous la contrainte

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx = c.$$

*Solution* : il suffit de résoudre le problème plus général de l'extrémisation de l'intégrale de  $G = F + \lambda f$  où  $\lambda$  est une constante, puis de choisir  $\lambda$  tel que la contrainte soit satisfaite.

*Démonstration* : considérons deux fonctions d'essai  $\eta_1(x)$  et  $\eta_2(x)$ . La condition d'extrémalité implique que la fonction

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2, y' + \alpha_1 \eta_1' + \alpha_2 \eta_2') dx \quad (2.87)$$

soit extrémale sous la contrainte

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2, y' + \alpha_1 \eta'_1 + \alpha_2 \eta'_2) dx = c \quad (2.88)$$

pour  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

D'après le théorème des extremums liés, cela implique qu'il existe  $\lambda$  tel que

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_1} \right|_{\substack{\alpha_1=0 \\ \alpha_2=0}} + \lambda \left. \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} \right|_{\substack{\alpha_1=0 \\ \alpha_2=0}} = 0 \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_2} \right|_{\substack{\alpha_1=0 \\ \alpha_2=0}} + \lambda \left. \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} \right|_{\substack{\alpha_1=0 \\ \alpha_2=0}} = 0, \end{cases} \quad (2.89)$$

soit

$$\begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \eta_1(x) dx = 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \eta_2(x) dx = 0. \end{cases} \quad (2.90)$$

La première équation fixe  $\lambda$ . Comme  $\eta_2(x)$  est indépendant de  $\eta_1(x)$ , la deuxième implique que  $G = F + \lambda f$  satisfait l'équation d'Euler. Autrement dit, il existe  $\lambda$  tel que  $\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y') dx$  est extrémal. La valeur de  $\lambda$  doit par ailleurs être ajustée pour que la contrainte soit satisfaite.

*Exemple :* Trouver la configuration d'un fil de masse linéique  $\rho$  et de longueur  $l$  fixé entre deux points de même hauteur.



*Solution :*

Il faut minimiser l'énergie potentielle

$$I[y] = \rho \int_{x_1}^{x_2} dx y \sqrt{1 + y'^2}$$

sous la contrainte

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} - l = 0.$$

On doit donc écrire l'équation d'Euler-Lagrange pour

$$\begin{aligned} L(y, y', x) &= y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \\ \frac{\partial L}{\partial y'} &= (y + \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \end{aligned}$$

*Remarque* : Le lagrangien ne dépend pas de  $x$ . Du coup  $y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L$  est une intégrale première

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad (y + \lambda) \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - (y + \lambda) \frac{1 + y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} &= \text{cte} \\ \text{soit } \frac{y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} &= C \\ (y + \lambda)^2 &= C^2(1 + y'^2) \\ \Rightarrow \quad y'^2 &= \frac{(y + \lambda)^2}{C^2} - 1 \\ \Rightarrow \quad y + \lambda &= C \cosh\left(\frac{x}{C} + C_1\right) \quad \text{“chaînette”} \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} y' &= \sinh\left(\frac{x}{C} + C_1\right) \\ \Rightarrow \quad y'^2 &= \sinh^2\left(\frac{x}{C} + C_1\right) \\ &= \cosh^2\left(\frac{x}{C} + C_1\right) - 1 \\ &= \frac{(y + \lambda)^2}{C^2} - 1. \end{aligned}$$

$\lambda, C$  et  $C_1$  sont déterminés par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \\ \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} = l \\ \Leftrightarrow \quad y + \lambda = C \cosh\left(\frac{x}{C} + C_1\right). \end{array} \right.$$

## 2.11 Lagrangien et changements de référentiels

Comme nous sommes partis de l'équation  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  pour établir les équations de Lagrange, et que cette équation est valable dans un référentiel galiléen, la formulation lagrangienne de la mécanique est valable dans un référentiel galiléen. Mais le lagrangien dans deux référentiels galiléens en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre n'est pas le même.

*Exemple* :  $L = T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  dans un référentiel. Considérons un référentiel en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $v_0$ . Soit  $x' = x - v_0t$  la coordonnée dans ce référentiel.



Le lagrangien  $L'$  dans ce référentiel est  $\frac{1}{2}m\dot{x}'^2$ . Par contre, le lagrangien  $L$  dans le référentiel original peut s'écrire en fonction de  $x'$  :

$$L(x', \dot{x}') = \frac{1}{2}m(\overbrace{\dot{x}' + v_0 t}^{\dot{x}})^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + m\dot{x}'v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Heureusement, ces deux lagrangiens conduisent aux mêmes équations. C'est un cas particulier de la remarque générale faite plus haut selon laquelle on peut ajouter une fonction du type  $\frac{dF}{dt}(q, t)$  au lagrangien sans changer les équations du mouvement. En effet,

$$\begin{aligned} L(x', \dot{x}') - L'(x', \dot{x}') &= m\dot{x}'v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{d}{dt} \underbrace{\left( mv_0 x' + \frac{1}{2}mv_0^2 t \right)}_{F(x', t)}. \end{aligned}$$

Si l'on préfère travailler dans un système de coordonnées qui se rapportent à un référentiel non galiléen, on peut procéder de deux façons :

1. Se placer dans ce référentiel, et inclure les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis dans le second membre des équations de Lagrange.
2. Ecrire le lagrangien dans un référentiel inertiel, faire un changement de variables par rapport aux nouvelles coordonnées, et écrire les équations de Lagrange habituelles. Les forces d'inertie apparaissent automatiquement comme une conséquence du changement de variables.

## 2.12 Le Théorème de Noether (1918)

Le théorème de Noether, publié en 1918, peut être résumé en disant que *pour chaque symétrie continue du Lagrangien il y a une quantité conservée*.

Soit donné un système à  $N$  degrés de liberté, associés à les coordonnées généralisées  $q_i$ , avec  $i = 1, \dots, N$ . Le système est caractérisé par un Lagrangien  $L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ . Supposons que le Lagrangien ne change pas après une transformation des coordonnées  $q_i \rightarrow q_i(s)$  qui dépende d'un seul paramètre  $s$  :

$$L(\{q_i(s)\}, \{\dot{q}_i(s)\}, t) = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \quad (2.91)$$

Autrement dit,

$$\frac{d}{ds} L(\{q_i(s)\}, \{\dot{q}_i(s)\}, t) = 0 \quad (2.92)$$

On peut montrer que la quantité

$$C = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(s)}{\partial s} \right) = \text{constante} \quad (2.93)$$

En effet, on prend la dérivée temporelle de l'Eq.2.93

$$\dot{C} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(s)}{\partial s} \right) \right] = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i(s)}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(s)}{\partial s} \right] \quad (2.94)$$

En utilisant les équations de Lagrange, on peut ré-écrire cette dernière équation dans la forme

$$\dot{C} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(s)}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(s)}{\partial s} \right] = \frac{d}{ds} L = 0 \quad (2.95)$$

ou la dernière égalité suit de la chaîne de dérivés.

### 2.12.1 Exemple: Invariance par translations

L'invariance par translations du Lagrangien s'écrit  $L(\{\vec{x}_i\}, \{\dot{\vec{x}}_i\}, t) = L(\{\vec{x}_i + s\vec{u}\}, \{\dot{\vec{x}}_i\}, t)$  ou  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire qui marque la direction selon laquelle l'invariance par translation du Lagrangien est valable.

L'eq.2.93 nous dit que la quantité conservée est

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \frac{\partial}{\partial s} (\vec{x}_i + s\vec{u}) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{P} \quad (2.96)$$

Autrement dit, l'invariance par translation selon  $\vec{u}$  du Lagrangien a comme conséquence la conservation de la composante selon  $\vec{u}$  de l'impulsion totale du système.

# Chapitre 3

## Les équations de Hamilton

### 3.1 Introduction

L'un des objectifs principaux de la mécanique analytique est la recherche d'intégrales premières. Dans le cadre du formalisme de Lagrange, la recherche de telles intégrales premières peut se faire en introduisant un système de coordonnées généralisées tel que certaines variables soient cycliques. En effet, les équations de Lagrange sont invariantes par un changement de coordonnées

$$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_N, t).$$

Il existe néanmoins des transformations beaucoup plus générales qui mélangent les coordonnées généralisées et les impulsions généralisées et qui conduisent à une méthode générale de recherche d'intégrales premières du mouvement. L'étude de cette méthode est l'objet de ce chapitre.

La première étape consiste à réécrire les  $N$  équations du second ordre d'Euler-Lagrange comme un système de  $2N$  équations du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{p}_i \equiv \frac{d}{dt}(p_i) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \\ p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \end{cases}$$

Ces équations ne sont pas très symétriques. On préférerait que la seconde équation soit sous la forme

$$\dot{q}_i = \frac{\partial F(q_i, p_i, t)}{\partial p_i}.$$

Ceci peut se faire à l'aide d'une *transformation de Legendre*. Considérons en effet une fonction  $f(x)$ , et posons  $z = \frac{df}{dx} \Leftrightarrow x = g(z)$ . Peut-on trouver une fonction  $f_*(z)$  telle que  $\frac{df_*}{dz} = g(z)$  ?

Comme  $g(z)$  est la fonction inverse de  $f'(z)$ , on a :

$$\begin{aligned} f'(g(z)) &= z \\ \Rightarrow f'(g(z)) g'(z) &= z g'(z) \end{aligned}$$

En intégrant, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [f(g(z))] &= \frac{d}{dz} [(z g(z))] - g(z) \\ \Rightarrow \frac{d}{dz} [(z g(z)) - f(g(z))] &= g(z) \\ \Rightarrow f_*(z) &= z g(z) - f(g(z)). \end{aligned}$$

*N.B.* : Ceci n'est possible que si  $f'$  est inversible, i.e. si  $\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$  si  $f$  est deux fois dérivable.

*Définition* : Soit  $f(x)$  une fonction dérivable. Sa transformée de Legendre est définie par

$$f_*(z) = z g(z) - f(g(z)) \quad (3.1)$$

où  $g = f'^{-1}$  est la fonction inverse de  $f'$ .

*Exemples* :

$$1. f(x) = \frac{mx^2}{2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = mx = z &\Rightarrow x = g(z) = \frac{z}{m} \\ f_*(z) = zx - f(x) &= \frac{z^2}{m} - \frac{m}{2} \frac{z^2}{m^2} = \frac{z^2}{2m}. \end{aligned}$$

$$2. \begin{cases} x > 0 \\ f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha} \end{cases}, \quad f'(x) = x^{\alpha-1}, \quad f''(x) = (\alpha-1)x^{\alpha-2}.$$

Si  $\alpha \neq 1$ , cette fonction est inversible.

$$f_*(z) = zx - f(x) = zx - \frac{x^\alpha}{\alpha} \text{ avec } x = z^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\Rightarrow f_*(z) = z^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} z^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) z^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

$$\text{Posons } \beta = \frac{\alpha}{\alpha-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = 1 - \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

$$f_*(z) = \frac{z^\beta}{\beta}.$$

### Fonctions à plusieurs variables

Si une fonction dépend de plusieurs variables, on peut faire une transformation de Legendre par rapport à certaines variables. Considérons par exemple une fonction  $F(x_1, \dots, x_m; u_1, \dots, u_n)$ . Les équations

$$z_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m; u_1, \dots, u_n) = \partial_i F(x_1, \dots, x_m; u_1, \dots, u_n) \quad (3.2)$$

peuvent s'inverser en

$$x_i = g_i(z_1, \dots, z_m; u_1, \dots, u_n) \quad (3.3)$$

à condition que

$$\det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0. \quad (3.4)$$

La transformée de Legendre est définie par :

$$F_*(z_1, \dots, z_m; u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^m x_k z_k - F. \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_*}{\partial z_i} &= x_i + \sum_{k=1}^m z_k \frac{\partial g_k}{\partial z_i} - \sum_{k=1}^m \underbrace{\partial_k F(g_1(z \dots), g_2(z \dots) \dots)}_{=z_k} \frac{\partial g_k}{\partial z_i} \\ &\Rightarrow \frac{\partial F_*}{\partial z_i} = x_i. \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\frac{\partial F_*}{\partial u_i} = -\frac{\partial F}{\partial u_i} - \sum_k \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} + \sum_k z_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = -\frac{\partial F}{\partial u_i}$  puisque  $z_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$ .

Revenons aux équations de Lagrange, et faisons une transformation de Legendre par rapport aux variables  $\dot{q}_i$ . La transformée de Legendre correspondante est notée  $H$  et s'appelle l'hamiltonien. C'est une fonction des  $q_i$  et des  $p_i$  définie par :

$$H(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N; t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; t) \quad (3.6)$$

où les  $\dot{q}_i$  sont considérés comme des fonctions des  $p_i$  et des  $q_i$  d'après les équations  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ .

*Remarque :* l'hamiltonien  $H$  a la même valeur que la fonction hamiltonienne  $h$ , mais ce sont des objets mathématiques différents.  $h$  est fonction des  $\dot{q}_i$  alors que  $H$  est fonction des  $p_i$ .

D'après les résultats précédents sur la transformation de Legendre, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad \boxed{\text{Équations canoniques}} \quad \boxed{\text{ou de Hamilton}} \quad (3.7)$$

Ces équations portent le nom d'équations canoniques pour souligner leur simplicité. Elles constituent une formulation équivalente des lois de la mécanique.

*N.B.* : Une telle description n'est possible que si  $\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j} \right) \neq 0$ .

*Cas particulier* : Supposons que le potentiel ne dépende pas des vitesses, et que l'énergie cinétique ne dépende que du carré des vitesses. Alors

$$\begin{aligned} H(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N; t) &= \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - L = 2T - L = T + V. \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'hamiltonien est égal à l'énergie. Mais il faut l'exprimer en fonction des impulsions généralisées.

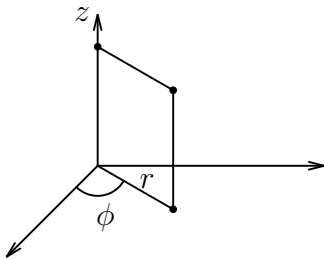
Exemple : Une particule dans un potentiel extérieur  $U(x, y, z)$ .

**Coordonnées cartésiennes** :  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}$$

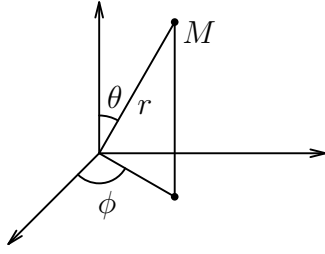
$$\Rightarrow \begin{cases} T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \\ H = T + V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \end{cases}$$

**Coordonnées cylindriques** :  $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$



$$\begin{aligned} p_r &= m\dot{r}, & p_\phi &= mr^2\dot{\phi}, & p_z &= m\dot{z} \\ \Rightarrow T &= \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + p_z^2 \right), & H &= T + U(r, \phi, z) \end{aligned}$$

**Coordonnées sphériques :**  $T = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$



$$\begin{cases} p_r = m\dot{r}, \\ p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \\ p_\phi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right), \quad H = T + U(r, \phi, z)$$

### Notations compactes

Les équations de Hamilton sont symétriques au signe près. Il est souvent utile de prendre cette symétrie en compte en introduisant une notation compacte :

$$\begin{cases} x_i = q_i, & i = 1, \dots, N \\ x_{i+N} = p_i, & i = 1, \dots, N \end{cases}$$

ce qui définit un vecteur de longueur  $2N$ .

Si on définit par ailleurs le vecteur colonne des dérivées de  $H$  par :

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right)_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

les équations de Hamilton s'écrivent sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = J \frac{\partial H}{\partial \vec{x}}, \quad (3.8)$$

où  $J$  est une matrice  $(2N \times 2N)$  définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_N \\ -\mathbb{1}_N & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}_{(N \times N)} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

### Principales propriétés de $J$

1.  $J^2 = -\mathbb{1}_{2N}$

Il suffit de faire le produit par blocs.

2.  ${}^t J = -J$  ( $J$  est antisymétrique).

3.  ${}^t J = J^{-1}$  ( $J$  est une matrice orthogonale)

*Démonstration :*  ${}^t J = -J \Rightarrow {}^t J J = -J^2 = \mathbb{1}$

### 3.2 Crochets de Poisson

La représentation de Hamilton conduit à plusieurs techniques de recherche d'intégrales premières. Dans la représentation lagrangienne on a vu que si une variable est cyclique, c'est-à-dire si  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , alors  $p_i = \text{constante}$ . Cela reste valable pour l'hamiltonien. En effet,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

Ainsi  $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \text{constante}$ .

Mais la forme très symétrique des équations de Hamilton suggère d'étendre cette recherche à des combinaisons des coordonnées  $p_i$  et  $q_i$ .

Soit donc  $f(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N, t)$  une fonction des coordonnées généralisées et des impulsions généralisées. Calculons sa dérivée par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.10)$$

On définit le *crochet de Poisson* de deux fonctions  $f, g$  des  $q_i, p_i$  et de  $t$  par :

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (3.11)$$

L'équation d'évolution de  $f$  s'écrit donc :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \quad (3.12)$$

**Intégrales premières :**  $f(q, p, t)$  est une intégrale première si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0. \quad (3.13)$$

En particulier, une fonction  $f(q, p)$  qui ne dépend pas explicitement du temps est une intégrale première si et seulement si

$$\{f, H\} = 0.$$



**Notation compacte**

Si on introduit la définition  $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ , avec toujours  $x_i = q_i$ ,  $x_{i+N} = p_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_{i+N}} - \frac{\partial f}{\partial x_{i+N}} \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^N f_i g_{i+N} - f_{i+N} g_i. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Or,

$$\begin{aligned} (f_1 \dots f_{2N}) \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_N \\ -\mathbb{1}_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{2N} \end{pmatrix} \\ = f_1 g_{N+1} + f_2 g_{N+2} + \dots + f_N g_{2N} - f_{N+1} g_1 - \dots - f_{2N} g_N \\ \Rightarrow \boxed{\{f, g\} = {}^t \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right) J \left( \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \right)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\text{soit } \{f, g\} = \sum_{j,k=1}^{2N} \frac{\partial f}{\partial x_j} J_{jk} \frac{\partial g}{\partial x_k}.$$

**Propriétés des crochets de Poisson**

1.  $\{f, g\} = -\{g, f\}$  évident
2.  $\{f, c\} = 0$  si  $c = \text{constante}$
3.  $\{f, q_i\} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$ ,  $\{f_i, p_i\} = +\frac{\partial f}{\partial q_i}$
4.  $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$ ,  $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
5.  $\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$
6.  $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$

Découle du fait que

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} (f_1 + f_2) \right) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)$$

$$7. \{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\}$$

Découle du fait que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(f_1 f_2) &= f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \Rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1 f_2), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2N}}(f_1 f_2) \right) &= f_1 \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_{2N}} \right) + f_2 \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_{2N}} \right) \end{aligned}$$

8. *Identité de Jacobi*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (3.16)$$

$$\text{On note } f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\begin{aligned} \{g, h\} &= \sum_{kl} g_k J_{kl} h_l \\ \Rightarrow \{f, \{g, h\}\} &= \sum_{ijkl} f_i J_{ij} [g_{kj} J_{kl} h_l + g_k J_{kl} h_{lj}] \end{aligned}$$

vu que  $\frac{\partial}{\partial x_j} J_{kl} = 0$  ( $J_{kl}$  est une constante !), soit

$$\{f, \{g, h\}\} = \sum_{ijkl} f_i J_{ij} J_{kl} [g_{kj} h_l + g_k h_{lj}].$$

Donc,

$$\begin{aligned} &\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\ &= \sum_{ijkl} (f_i J_{ij} J_{kl} [g_{kj} h_l + g_k h_{lj}] \\ &\quad + g_i J_{ij} J_{kl} [h_{kj} f_l + h_k f_{lj}] \\ &\quad + h_i J_{ij} J_{kl} [f_{kj} g_l + f_k g_{lj}]). \end{aligned}$$

Chaque terme de cette somme contient une et une seule dérivée seconde. On peut donc classer les termes d'après la dérivée seconde qui y intervient.

Considérons une dérivée seconde, par exemple  $g_{mn}$ . Son coefficient s'écrit comme la somme de quatre termes :

$$\begin{aligned} 1^{\text{ère}} \text{ somme, } k = m, j = n &\rightarrow \sum_{il} f_i J_{in} J_{ml} h_l \\ 1^{\text{ère}} \text{ somme, } k = n, j = m &\rightarrow \sum_{il} f_i J_{im} J_{nl} h_l \\ 3^{\text{ème}} \text{ somme, } l = m, j = n &\rightarrow \sum_{ik} h_i J_{in} J_{km} f_k \\ 3^{\text{ème}} \text{ somme, } l = n, j = m &\rightarrow \sum_{ik} h_i J_{im} J_{kn} f_k \end{aligned}$$

Faisons le changement d'indice ( $i \rightarrow l, k \rightarrow i$ ) dans les deux dernières expressions. Le coefficient de  $g_{mn}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} & \sum_{il} f_i h_l [J_{in} J_{ml} + J_{im} J_{nl} + J_{ln} J_{im} + J_{lm} J_{in}] \\ &= \sum_{il} f_i h_l \left[ J_{in} \underbrace{(J_{ml} + J_{lm})}_{=0} + J_{im} \underbrace{(J_{nl} + J_{ln})}_{=0} \right] \end{aligned}$$

car  $J$  est antisymétrique. Le coefficient de  $g_{mn}$  est donc nul, ainsi que celui des autres dérivées secondes. C.Q.F.D.

Le principal intérêt des crochets de Poisson réside dans le théorème suivant.

**Théorème de Poisson :** *Si  $f$  et  $g$  sont des intégrales premières, alors  $\{f, g\}$  est aussi une intégrale première.*

*Démonstration :* il faut démontrer que

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \{H, \{f, g\}\}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \\ &= \{ \{H, f\}, g \} + \{ f, \{H, g\} \} \quad (f, g \text{ intégrales premières}) \\ &= -\{g, \{H, f\}\} - \{f, \{g, H\}\} \\ &= \{H, \{f, g\}\} \text{ d'après Jacobi.} \end{aligned}$$

Les crochets de Poisson constituent donc une méthode systématique de recherche d'intégrales premières. Bien sûr, si  $f$  et  $g$  sont deux intégrales premières,  $\{f, g\}$  peut être nul, ou simplement une combinaison linéaire de  $f$  et  $g$ , auquel cas on ne génère pas de nouvelle intégrale première, mais il y a des situations où on génère effectivement toute une série d'intégrales premières.

*Exemple : Oscillateur harmonique*

On considère le mouvement d'une particule à 1 dimension soumise à une force de rappel égale à  $-kx$ . Nous allons résoudre ce problème à l'aide de toutes les méthodes du cours.

1. *Newton* (le plus simple ici !)

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

*Solution générale :*

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \\ \text{ou } x(t) &= a \cos(\omega t + \alpha)\end{aligned}$$

*Relation entre les deux solutions :*

$$a \cos \omega t \cos \alpha - a \sin \omega t \sin \alpha = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

$$\begin{cases} a \cos \alpha = c_1 \\ -a \sin \alpha = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \operatorname{tg} \alpha = -\frac{c_2}{c_1} \end{cases}$$

$$\text{Energie : } \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = E = \frac{m\omega^2}{2} a^2$$

$$F = -kx = -m\omega^2 x = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2.$$

2. *Lagrange*

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega^2 x$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0 \quad \text{même équation que Newton.}$$

3. *Hamiltonien :*

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \quad (q = x, p = m\dot{x})$$

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \\ \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{cases}$$

Posons  $\vec{u} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ . On a :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} = M\vec{u} \\ M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Essayons de diagonaliser  $M$ . Les valeurs propres sont données par l'équation caractéristique

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= \omega^2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_+ = i\omega \\ \lambda_- = -i\omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Déterminons les vecteurs propres associés.

$$\begin{aligned} \vec{u}_+ \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} : & \quad M\vec{u}_+ = \lambda_+ \vec{u}_+ = i\omega \vec{u}_+ \\ & \Rightarrow \frac{1}{m}y_+ = i\omega x_+ \quad \Rightarrow \quad y_+ = im\omega x_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_- \begin{pmatrix} x_- \\ y_- \end{pmatrix} : & \quad M\vec{u}_- = \lambda_- \vec{u}_- = i\omega \vec{u}_- \\ & \Rightarrow \frac{1}{m}y_- = i\omega x_- \quad \Rightarrow \quad y_- = im\omega x_- \end{aligned}$$

On peut donc choisir

$$\vec{u}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ im\omega \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -im\omega \end{pmatrix}.$$

Posons  $\vec{u} = \alpha_+(t)\vec{u}_+ + \alpha_-(t)\vec{u}_-$ . L'équation  $\frac{d\vec{u}}{dt} = M\vec{u}$  s'écrit :

$$\dot{\alpha}_+(t)\vec{u}_+ + \dot{\alpha}_-(t)\vec{u}_- = \lambda_+\vec{u}_+ + \lambda_-\vec{u}_-,$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} & \quad \begin{cases} \dot{\alpha}_+(t) = \lambda_+ \\ \dot{\alpha}_-(t) = \lambda_- \end{cases} \\ \text{soit} & \quad \begin{cases} \alpha_+(t) = \alpha_+(0)e^{\lambda_+ t} \\ \alpha_-(t) = \alpha_-(0)e^{\lambda_- t} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme  $\lambda_+ = i\omega$  et  $\lambda_- = -i\omega$ , la solution générale s'écrit donc :

$$\vec{u}(t) = \alpha_+ e^{i\omega t} \vec{u}_+ + \alpha_- e^{-i\omega t} \vec{u}_-.$$

Le problème initial fait intervenir  $p$  et  $q$ , c'est-à-dire des nombres réels, d'où

$$q(t) = \alpha_+ e^{i\omega t} + \alpha_- e^{-i\omega t} = (\alpha_+ + \alpha_-) \cos \omega t + i(\alpha_+ - \alpha_-) \sin \omega t.$$

Pour obtenir une solution réelle, il faut que  $\alpha_+ + \alpha_-$  soit réel, et  $\alpha_+ - \alpha_-$  imaginaire pur  $\Rightarrow \alpha_+ = \alpha_-^*$ . Posons

$$\begin{cases} \alpha_+ = \frac{c_1 - ic_2}{2} \\ \alpha_- = \frac{c_1 + ic_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_+ + \alpha_- = c_1 \\ i(\alpha_+ - \alpha_-) = c_2. \end{cases}$$

## 4. Crochet de Poisson :

Démontrons que  $u(p, q, t) = \ln(p + im\omega q) - i\omega t$  est une constante du mouvement en utilisant le crochet de Poisson.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -i\omega + \{u, H\} \\ \{u, H\} &= \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial p} \\ &= \frac{p}{m} \frac{im\omega}{p + im\omega q} - \frac{m\omega^2 q}{p + im\omega q} \\ &= i\omega \frac{p + im\omega q}{p + im\omega q} = i\omega \\ \Rightarrow \frac{du}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Posons  $u = u_0$ ,

$$\ln(p + im\omega q) - i\omega t = u_0, \quad p + im\omega q = e^{u_0} e^{i\omega t}.$$

Posons  $\frac{e^{u_0}}{im\omega} = ae^{i\alpha}$

$$\begin{aligned} p + im\omega q &= im\omega a e^{i(\omega t + \alpha)} \\ \Rightarrow \boxed{q = a \cos(\omega t + \alpha)}. \end{aligned}$$

### 3.3 Principe de moindre action

Les équations de Hamilton découlent également d'un principe de moindre action. Considérons en effet l'action comme fonction des trajectoires  $\{q_i(t), p_i(t)\}$  :

$$S[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}] = \int_1^2 \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right\} dt. \quad (3.17)$$

C'est bien la même quantité que celle précédemment introduite puisque  $H = \sum_i p_i \dot{q}_i -$

$L$ . La fonction qui se trouve dans l'intégrale peut être considérée comme fonction des  $q_i$ ,  $p_i$ ,  $\dot{q}_i$ ,  $\dot{p}_i$  et du temps :

$$G(q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i, t) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t). \quad (3.18)$$

Pour que l'action soit extrémale, il faut que  $G$  satisfasse les  $2n$  équations d'Euler-Lagrange relatives aux variables  $q_i$  et  $p_i$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial G}{\partial p_i} = 0 & \Leftrightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial G}{\partial q_i} = 0 & \Leftrightarrow \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (3.19)$$

*N.B.* : Cette démonstration ne suppose pas que  $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0$  car  $G$  ne dépend pas en fait de  $\dot{p}_i$ , et donc on n'a pas besoin d'intégrer par parties.

### 3.4 Transformations canoniques et fonctions génératrices

*Définition* : Une transformation canonique est un changement de variables  $Q_i(q_i, p_i, t)$ ,  $P_i(q_i, p_i, t)$  tel que les équations du mouvement soient encore des équations canoniques.

En d'autres termes, il s'agit de transformations telles qu'il existe une fonction  $K(Q_i, P_i, t)$  telle que

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_i}. \quad (3.20)$$

D'après le principe variationnel, une condition suffisante est qu'il existe une fonction  $F(q_i, Q_i, p_i, P_i, t)$  telle que les fonctions intégrées dans le principe de moindre action ne diffèrent que par la dérivée totale de  $F$  par rapport au temps :

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i, t) + \frac{dF}{dt}. \quad (3.21)$$

En effet,  $\int_1^2 \frac{dF}{dt} dt = F(2) - F(1)$  ne change pas si l'on fait varier les trajectoires en laissant  $q_i(t_1), q_i(t_2), p_i(t_1), p_i(t_2), Q_i(t_1), Q_i(t_2), P_i(t_1), P_i(t_2)$  fixés.

Comme

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

certains choix de la forme de  $F$  conduisent à des équations implicites très simples pour la transformation canonique.

1.  $F(q_i, Q_i, p_i, P_i, t) = F_1(q_i, Q_i, t)$ .

L'équation de base est alors satisfaite dès que

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{array} \right.$$

$$2. F(q_i, Q_i, p_i, P_i, t) = -\sum_i Q_i P_i + F_2(q_i, P_i, t)$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = -\sum_i P_i \dot{Q}_i - \sum_i Q_i \dot{P}_i + \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \end{cases}$$

$$3. F(q_i, Q_i, p_i, P_i, t) = \sum_i q_i p_i + F_3(p_i, Q_i, t).$$

$$\begin{cases} q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \\ P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \\ K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \end{cases}$$

$$4. F(q_i, Q_i, p_i, P_i, t) = \sum_i q_i p_i - \sum_i P_i Q_i + F_4(p_i, P_i, t).$$

$$\begin{cases} q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \\ Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \\ K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \end{cases}$$

En pratique, il suffit donc pour engendrer une transformation canonique de se donner une fonction dépendant de deux types de variables ( $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  ou  $F_4$ ). Les deux premières équations permettent d'exprimer les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes, et la troisième précise la forme de l'hamiltonien en fonction des nouvelles variables. Si une transformation canonique est engendrée par une fonction  $F_i$ , on dit que  $F_i$  est la *fonction génératrice* de cette transformation.

*Remarques :*

1. Les grandeurs  $Q_i$  et  $P_i$  n'ont plus l'interprétation simple de coordonnées et impulsions dans la mesure où les  $q_i$  et  $p_i$  sont complètement mélangés dans la définition des  $Q_i$  et  $P_i$ . L'exemple le plus frappant consiste à prendre  $F_1(q_i, Q_i, t) = \sum_i q_i Q_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_i = Q_i \\ P_i = -q_i \end{cases}$$



On a interverti les coordonnées et les impulsions ! On parle dans ce contexte de grandeurs canoniquement conjuguées pour éviter toute référence fallacieuse aux coordonnées et impulsions.

2. L'intérêt des transformations canoniques est qu'elles peuvent mener à un problème plus simple, voire trivial, suivant la forme de  $K$ .

*Exemple* : oscillateur harmonique

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2.$$

Etudions la transformation canonique associée à  $F_1(q, Q, t) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$  :

$$\begin{cases} p = m\omega q \cot Q \\ P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \\ p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K &= H \quad (\text{puisque } \frac{\partial F}{\partial t} = 0) \\ &= \frac{2Pm\omega \cos^2 Q}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q = \omega P. \end{aligned}$$

Comme  $Q$  est cyclique,

$$\begin{aligned} \dot{P} = 0 &\Rightarrow P = \text{cte} = \frac{E}{\omega} \\ \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega &\Rightarrow Q = \omega t + \theta \\ &\Rightarrow q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

soit  $q = a \cos(\omega t + \alpha)$  avec  $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ ,  $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2}$ .

3.  $F_2 = \sum_i q_i P_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i \end{cases}$$

$F_2 = \sum_i q_i P_i$  génère l'identité.

4. Les fonctions  $F_1, F_2, F_3$  et  $F_4$  associées à une même transformation canonique sont reliées entre elles par des transformations de Legendre. En effet, d'après ce que nous avons vu sur la transformée de Legendre, si  $F_{1*}(q_i, P_i)$  désigne la transformée de Legendre de  $F_1$  par rapport à  $Q_i$ , alors

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{cases}$$

implique

$$\begin{cases} p_i = \frac{-\partial F_{1*}}{\partial q_i} \\ Q_i = -\frac{\partial F_{1*}}{\partial P_i} \end{cases}$$

Ainsi,  $F_2 = -F_{1*}$ .  $F_2$  est donc l'opposé de la transformée de Legendre de  $F_1$  par rapport à  $Q_i$ :

$$F_2 = F_1 + \sum_i P_i Q_i.$$

De même, on vérifie aisément que  $F_3$  est l'opposé de la transformée de Legendre de  $F_1$  par rapport à  $q_i$ :

$$F_3 = F_1 - \sum_i q_i P_i.$$

Enfin,  $F_4$  est l'opposé de la transformée de Legendre de  $F_1$  par rapport à  $q_i$  et  $Q_i$ :

$$F_4 = F_1 + \sum_i Q_i P_i - \sum_i q_i p_i.$$

Si ces transformations de Legendre existent, ce qui est vrai en général, une transformation canonique peut se faire à l'aide de l'une des quatre fonctions génératrices  $F_1, F_2, F_3$  ou  $F_4$  de façon équivalente. Il y a néanmoins des exceptions. Par exemple, l'identité est engendrée par  $F_2 = \sum_i q_i P_i$ , mais  $\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_j} = 0$ . Cette fonction génératrice n'a donc pas de transformée de Legendre.

### 3.5 Transformations canoniques et structure symplectique

Considérons une transformation canonique décrite par les fonctions génératrices  $F_1, F_2, F_3$  et  $F_4$ . Les nouvelles variables  $Q_i$  et  $P_i$  peuvent être considérées comme des fonctions de  $q, p, t$  :

$$\begin{cases} Q_i(q, p, t) \\ P_i(q, p, t) \end{cases} \quad (q \equiv q_1, \dots, q_N; p \equiv p_1, \dots, p_N)$$

De même, en inversant la transformation,  $p_i$  et  $q_i$  peuvent être considérés comme fonction de  $Q, P, t$  :

$$\begin{cases} q_i(Q, P, t) \\ p_i(Q, P, t) \end{cases}$$

L'existence de fonctions génératrices impose des relations à ces fonctions. Considérons par exemple  $F_1$ . On a :

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{cases}$$

Mais

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial q_i} \Rightarrow \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}.$$

De même,

$$F_2 \Rightarrow \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$$

$$F_3 \Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}$$

$$F_4 \Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}.$$

Retournons aux notations compactes :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N) \\ \vec{y} &= (Q_1, \dots, Q_N; P_1, \dots, P_N). \end{aligned}$$

On définit la matrice  $M$  par

$$M_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

Cette matrice s'appelle la *matrice jacobienne* de la transformation. Les éléments de matrice de  $M^{-1}$  sont donnés par :

$$(M^{-1})_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}.$$

En effet, si on considère  $\vec{x}$  comme fonction de  $\vec{y}$  et  $\vec{y}$  comme fonction de  $\vec{x}$ , on doit obtenir l'identité :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \sum_{k=1}^{2N} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial y_k}}_{(M^{-1})_{ik}} \underbrace{\frac{\partial y_k}{\partial x_j}}_{M_{kj}} = \delta_{ij}.$$

**Proposition 3.1.** *Les relations déduites de l'existence des fonctions  $F_1, F_2, F_3, F_4$  s'écrivent*

$${}^tMJM = J.$$

*Démonstration :* On va démontrer que  ${}^tMJ = JM^{-1}$ . Adoptons une notation par bloc :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$${}^tM = \begin{pmatrix} {}^t\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right) & {}^t\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right) \\ {}^t\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right) & {}^t\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right) \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^tMJ = \begin{pmatrix} -{}^t\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right) & {}^t\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right) \\ -{}^t\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right) & {}^t\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right) \end{pmatrix} \quad JM^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \\ -\frac{\partial q}{\partial Q} & -\frac{\partial q}{\partial P} \end{pmatrix}.$$

L'égalité de ces deux matrices conduit à :

$$-{}^t\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right) = \frac{\partial p}{\partial Q} \longleftarrow F_1$$

$${}^t\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right) = \frac{\partial p}{\partial P} \longleftarrow F_2$$

$${}^t\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right) = \frac{\partial q}{\partial Q} \longleftarrow F_3$$

$${}^t\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right) = -\frac{\partial q}{\partial P} \longleftarrow F_4$$

Ce sont précisément les relations qui ont été déduites de l'existence des fonctions génératrices  $F_1, F_2, F_3$  et  $F_4$ .

*Définition :* On appelle matrices symplectiques réelles les matrices qui satisfont la condition

$$\boxed{{}^tMJM = J}$$

On en déduit la propriété suivante:

**Proposition 3.2.** *Une transformation est canonique si et seulement si sa matrice jacobienne est symplectique.*

**Théorème 3.1** *L'ensemble des matrices réelles symplectiques de dimension  $(2N \times 2N)$  forme un groupe appelé le groupe réel symplectique et noté  $\text{Sp}_{2N}(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration :*

1. Si  $M_1$  et  $M_2$  sont symplectiques,  $M_1M_2$  l'est. En effet,

$${}^t(M_1M_2)JM_1M_2 = {}^tM_2 \underbrace{{}^tM_1JM_1}_{=J}M_2 = J.$$

2. La multiplication est associative.

3.  $\mathbb{1} \in \text{Sp}_{2N}(\mathbb{R})$  (trivial).

4. Si  $M$  est symplectique,  $M^{-1}$  est symplectique.

$${}^tMJM = J \quad \Rightarrow \quad J = ({}^tM)^{-1}JM^{-1} = {}^t(M^{-1})JM^{-1}.$$

puisque  $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$ . En effet,  ${}^t(M^{-1}){}^tM = {}^t(MM^{-1}) = {}^t\mathbb{1} = \mathbb{1}$ .

**Proposition 3.3.** *Si  $M \in \text{Sp}_{2N}(\mathbb{R})$ ,  $\det M = 1$ .*

*Démonstration :* On procède en deux étapes :

1.  ${}^tMJM = J$

$$\Rightarrow \det({}^tM) \det(M) = 1$$

$$\Rightarrow (\det M)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det M = \pm 1$$

2. Supposons que  $M$  soit associé à la fonction génératrice  $F_2$ . On peut écrire :

$$F_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \left[ \epsilon \underbrace{\left( F_2 - \sum_i q_i P_i \right) + \sum_i q_i P_i}_{F_2(\epsilon)} \right].$$

Quand  $\epsilon = 0$ , on a l'identité, alors  $\det \mathbb{1} = +1$ . Par continuité, on doit avoir

$$\det(M(\epsilon)) = +1$$

où  $M(\epsilon)$  est la transformation canonique associée à  $F_2(\epsilon)$ .

**Proposition 3.4.**  ${}^tMJM = J \Leftrightarrow MJ^tM = J$ .

*Démonstration :*  ${}^tMJM = J \Leftrightarrow {}^tMJ = JM^{-1}$ . On multiplie à gauche par  $J$ , à droite par  $J$  :

$$J^tM = M^{-1}J.$$

On multiplie à gauche par  $M$  :

$$MJ^tM = J.$$

*Exemple :* On se propose de montrer que la transformation

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \\ p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q \end{cases}$$

est canonique en démontrant que la matrice jacobienne est symplectique.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \cos Q & \frac{\partial q}{\partial P} = \frac{\sin Q}{\sqrt{2m\omega P}} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} = -\sqrt{2Pm\omega} \sin Q & \frac{\partial p}{\partial P} = \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} \cos Q \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin Q}{\sqrt{2m\omega P}} & \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \cos Q \\ -\sqrt{\frac{m\omega}{2P}} \cos Q & -\sqrt{2Pm\omega} \sin Q \end{pmatrix}$$

$$MJ^tM = MJ \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \cos Q & -\sqrt{2Pm\omega} \sin Q \\ \frac{\sin Q}{\sqrt{2m\omega P}} & \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} \cos Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

C.Q.F.D.

En résumé, on a obtenu une caractérisation des transformations canoniques qui ne fait pas référence explicitement à une fonction génératrice sous-jacente. En effet, une transformation est canonique si et seulement si la matrice jacobienne est symplectique.

### 3.6 Transformations canoniques et crochets de Poisson

On pose toujours  $\vec{x} = (q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)$  et  $\vec{y} = (Q_1, \dots, Q_N; P_1, \dots, P_N)$ . Soit  $v$  une fonction scalaire de l'état du système. On peut considérer  $v$  comme une fonction de  $\vec{x}$  ou de  $\vec{y}$ . Les dérivées partielles par rapport à ces variables sont reliées par la relation :

$$\frac{\partial v}{\partial \vec{x}} = {}^t M \frac{\partial v}{\partial \vec{y}}.$$

En effet,

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial v}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_j M_{ji} \frac{\partial v}{\partial y_j} = \sum_j ({}^t M)_{ij} \frac{\partial v}{\partial y_j}.$$

De même, si  $u$  est une fonction scalaire de l'état du système, on a :

$${}^t \left( \frac{\partial u}{\partial \vec{x}} \right) = {}^t \left( \frac{\partial u}{\partial \vec{y}} \right) M.$$

Le crochet de Poisson par rapport aux variables  $\vec{y}$  peut donc s'exprimer simplement en fonction de celui par rapport aux variables  $\vec{x}$  :

$$\begin{aligned} \{u, v\}_{\vec{x}} &= {}^t \left( \frac{\partial u}{\partial \vec{x}} \right) J \left( \frac{\partial v}{\partial \vec{x}} \right) = {}^t \left( \frac{\partial u}{\partial \vec{y}} \right) \underbrace{MJ^t M}_{=J} \left( \frac{\partial v}{\partial \vec{y}} \right) \\ &= \{u, v\}_{\vec{y}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

**Théorème 3.2** *Le crochet de Poisson est invariant par une transformation canonique.*

**Conséquence :** Pour les nouvelles variables, on a bien sûr

$$\begin{cases} \{Q_i, Q_j\}_{Q,P} = \{P_i, P_j\}_{Q,P} = 0 \\ \{Q_i, P_j\}_{Q,P} = \delta_{ij}. \end{cases}$$

D'après le théorème 3.2, on doit avoir :

$$\begin{cases} \{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \\ \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}. \end{cases}$$

C'est une condition nécessaire (dont on peut montrer qu'elle est suffisante) pour qu'une transformation soit canonique. Autrement dit, si on considère une transformation définie par la donnée explicite de fonctions  $Q_i(q, p, t)$  et  $P_i(q, p, t)$ , les crochets de Poisson conduisent à une nouvelle méthode pour vérifier si elle est canonique.

Cette méthode est bien sûr équivalente à celle qui consiste à vérifier que la matrice jacobienne est symplectique, mais elle est en pratique souvent plus simple.

*Exemple :* Considérons à nouveau la transformation 
$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \\ p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \{q, p\} &= \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} \\ &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \cos Q \sqrt{2m\omega} \frac{1}{2\sqrt{P}} \cos Q - \sqrt{\frac{2}{m\omega}} \frac{1}{2\sqrt{P}} \sin Q \sqrt{2Pm\omega} (-\sin Q) \\ &= \cos^2 Q + \sin^2 Q = 1. \end{aligned}$$

La transformation est bien canonique.

### 3.7 L'équation de Hamilton-Jacobi : cas général

On a vu qu'après une transformation canonique le nouvel hamiltonien s'écrit

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (3.23)$$

Peut-on trouver  $F$  tel que  $K = 0$  ? Si c'est le cas, les nouvelles variables  $Q_i$  et  $P_i$  sont des constantes, donc des intégrales premières si on les considère comme des fonctions des anciennes variables et du temps, et les équations qui relient les  $p_i, q_i$  aux  $P_i, Q_i$  conduisent directement à la dépendance en temps de  $q_i$  et  $p_i$ , c'est-à-dire à la solution du problème.

Pour être plus spécifique, on cherche s'il existe une fonction  $F_2(q_i, P_i, t)$  telle que

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \\ H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

avec la condition implicite que les  $2n$  équations reliant les  $p_i, q_i$  aux  $P_i, Q_i$  conduisent à des expressions pour  $P_i, Q_i$  qui en font des variables canoniques, c'est-à-dire qui satisfassent les crochets de Poisson canoniques.

Comme  $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ , la troisième équation du système (3.24) peut être réécrite

$$H \left( q_1, \dots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \quad (3.25)$$



C'est une condition nécessaire que doit satisfaire  $F_2(q_i, P_i, t)$ .

*Définition* : l'équation aux dérivées partielles

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

dans l'espace des fonctions à  $n + 1$  variables  $f(q_1, \dots, q_n, t)$  s'appelle l'équation d'Hamilton-Jacobi.

Comme cette équation fait intervenir  $n + 1$  dérivées partielles, la solution générale, si elle existe, doit dépendre de  $n + 1$  constantes d'intégration  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ . Par ailleurs, comme elle ne fait intervenir que les dérivées de  $f$ , si  $f$  est solution,  $f + c$ , où  $c$  est une constante, est aussi solution. L'une des constantes d'intégration est donc une constante additive. Autrement dit, la solution générale de l'équation de Hamilton-Jacobi, si elle existe, peut s'écrire sous la forme

$$f(q_1, \dots, q_n, t) = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) + \alpha_{n+1}. \quad (3.26)$$

Revenons à notre problème initial, et considérons la transformation génératrice  $F_2(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n; t) \equiv S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1=P_1, \dots, \alpha_n=P_n; t)$ . Comme  $S$  est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi,  $F_2$  satisfait l'équation (3.25). Par ailleurs, on peut démontrer que si  $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n; t)$  est la solution générale du problème, les équations

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \end{cases}$$

conduisent à des expressions indépendantes pour les  $P_i$  et  $Q_i$ , donc à une transformation canonique. La fonction  $F_2$  ainsi définie est donc la solution du problème initialement posé (Eq. (3.24)).

En pratique, on procède de la façon suivante :

1. Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n}; t\right) = 0.$$

2. Chercher la solution générale

$$S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1; \dots, \alpha_n; t)$$

en omettant la constante additive  $\alpha_{n+1}$ .

3. En déduire la fonction génératrice  $F_2(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n; t)$  qui conduit à  $K = 0$  définie par :

$$F_2(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n; t) \equiv S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1=P_1, \dots, \alpha_n=P_n; t)$$

4. Exprimer les  $q_i$  et  $p_i$  en fonction des  $Q_i$  et  $P_i$  à l'aide des équations

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}. \end{cases}$$

Comme les  $Q_i$  et  $P_i$  sont des constantes, on a trouvé la solution générale du problème initial. Les constantes  $Q_i$  et  $P_i$  peuvent être ajustées pour que les conditions aux limites sur  $q_i(t)$  et  $p_i(t)$  soient satisfaites.

*Exemple* : Oscillateur harmonique

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2.$$

On cherche une fonction  $f(q, t)$  qui satisfait

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Cherchons la solution sous la forme

$$\begin{aligned} f(q, t) &= f_1(t) + f_2(q) \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{df_1}{dt}}_{\text{fct. de } t} + \frac{1}{2m} \underbrace{\left[ \left( \frac{df_2}{dq} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right]}_{\text{fct. de } q} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{df_1}{dt} = -\alpha \\ \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{df_2}{dq} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(t) = -\alpha t + \beta \\ \frac{df_2}{dq} = \pm \sqrt{2m\alpha - m^2 \omega^2 q^2} \end{cases}$$

La solution générale de l'équation de Hamilton-Jacobi est donc donnée par

$$\Rightarrow \boxed{S(q, \alpha, t) = \int_0^q dq' \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q'^2} - \alpha t}$$

*N.B.*  $\beta$ , qui n'est qu'une constante additive, n'intervient pas dans  $S$ .

Considérons donc la fonction génératrice

$$F_2(q, P, t) = \int_0^q dq' \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q'^2} - Pt.$$

On a :

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q^2}$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = -t + \int_0^q dq' \frac{m}{\sqrt{2mP - m^2\omega^2 q'^2}}$$

Comme la primitive de  $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  est  $\text{Arcsin} \frac{x}{a}$ ,

$$Q = -t + \sqrt{\frac{m}{2P}} \int_0^q dx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2P} x^2}}$$

$$= -t + \sqrt{\frac{m}{2P}} \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \text{Arcsin} q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}}$$

$$= -t + \frac{1}{\omega} \text{Arcsin} q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}}$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \sin \omega(t + Q)$$

$$\boxed{q = a \sin(\omega t + \theta)}$$

*Remarque 1 :*  $P = \text{énergie} !$

*Remarque 2 :* On pourrait croire que  $p$  est toujours positif. En fait, après  $q_{\max}$ , il faut choisir l'autre branche,  $\frac{dS}{dq} = -\sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}$ . Plus sûr :  $p = m\dot{q} !$

*Interprétation de  $S$  :* Ce n'est pas par hasard qu'on a appelé la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi  $S$ . Calculons en effet la dérivée totale de  $S$  par rapport au temps :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial S}{\partial P_i} \dot{P}_i.$$

Mais  $\dot{P}_i = 0$  car  $P_i = \text{constante}$ . Ainsi,

$$\frac{dS}{dt} = -H + \sum_i p_i \dot{q}_i = L \quad (3.27)$$

$$\Rightarrow S(t) - S(t_0) = \int_{t_0}^t L(q, \dot{q}, t') dt'. \quad (3.28)$$

A une constante près,  $S$  correspond à l'action calculée le long des trajectoires physiques, i.e. des trajectoires vraiment suivies par le système. En fait, on peut même montrer que  $S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) = \int_{t_0}^t L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t') dt'$ , calculée le long de la trajectoire qui arrive en  $q_1(t) = q_1, \dots, q_n(t) = q_n$ , les  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  étant reliés à  $t_0$  et aux  $q_1(t_0), \dots, q_n(t_0)$ . Ceci dit, cette remarque n'est d'aucune utilité pour résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi : pour calculer  $S$  d'après cette expression, il faut connaître les trajectoires, donc avoir résolu le problème, et si on a résolu le problème, il n'y a plus aucune raison de résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi.

*Exemple* : On se propose de retrouver la forme de  $S$  pour l'oscillateur harmonique à partir de la solution connue :

$$q(t) = a \cos(\omega t + \alpha), \quad \dot{q}(t) = -a\omega \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\begin{cases} q(t_1) = q_1 = a \cos(\omega t_1 + \alpha) \\ q(t_2) = q_2 = a \cos(\omega t_2 + \alpha) \end{cases} \Rightarrow a, \alpha \text{ en fonction de } q_1, q_2.$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha) - \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \right] dt \\ &= -\frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \int_{t_1}^{t_2} \cos 2(\omega t + \alpha) dt \\ &= -\frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \left[ \frac{\sin 2(\omega t + \alpha)}{2\omega} \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

$$S = -\frac{1}{4} m a^2 \omega [\sin 2(\omega t_2 + \alpha) - \sin 2(\omega t_1 + \alpha)]$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2\sqrt{1 - \cos^2 x} \cos x$$

$$\begin{aligned} a^2 \sin 2(\omega t_2 + \alpha) &= 2a \cos(\omega t_2 + \alpha) \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2(\omega t_2 + \alpha)} \\ &= 2q_2 \sqrt{a^2 - q_2^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{2}m\omega \left[ q_2\sqrt{a^2 - q_2^2} - q_1\sqrt{a^2 - q_1^2} \right].$$

Attention ! Il faut encore exprimer  $a$  en fonction de  $q_1, q_2$  :

$$\begin{cases} q_1 = a \cos(\omega t_1 + \alpha) \\ q_2 = a \cos(\omega t_2 + \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Arccos} \frac{q_1}{a} = \omega t_1 + \alpha \\ \text{Arccos} \frac{q_2}{a} = \omega t_2 + \alpha \end{cases}$$

$$\text{Arccos} \frac{q_2}{a} - \text{Arccos} \frac{q_1}{a} = \omega(t_2 - t_1)$$

Pour simplifier, posons  $q_1 = 0$  et  $t_1 = 0$ , alors  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

$$q_2 = -a \sin(\omega t_2) \Rightarrow a = \frac{-q_2}{\sin(\omega t_2)}$$

$$q_2 < 0 \Rightarrow \sqrt{a^2 - q_2^2} = -q_2 \sqrt{\frac{a^2}{q_2^2} - 1}$$

$$\Rightarrow S = +\frac{1}{2}m\omega q_2^2 \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\omega t_2)} - 1} = \frac{1}{2}m\omega q_2^2 \cot(\omega t_2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q_2} = m\omega q_2 \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\omega t_2)} - 1} = m\omega \sqrt{a^2 - q_2^2} \\ \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2}m\omega q_2^2 \left( -\frac{\omega}{\sin^2(\omega t_2)} \right) = -\frac{m\omega^2 a^2}{2} \end{cases}$$

### 3.8 L'équation de Hamilton-Jacobi : $H$ indépendant de $t$

Lorsque l'hamiltonien ne dépend pas du temps, on peut toujours chercher la solution sous la forme

$$S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) = W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) - \alpha_1 t. \quad (3.29)$$

En reportant cette expression dans l'équation de Hamilton-Jacobi, on trouve

$$H \left( q_1, \dots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n} \right) = \alpha_1. \quad (3.30)$$

Cette équation est appelée l'*équation caractéristique de Hamilton-Jacobi*. On peut simplement l'utiliser pour calculer  $S$ . Mais on peut également utiliser  $W$  pour faire une transformation canonique :

$$F_2(q_1, \dots, q_n; P_1, \dots, P_n; t) = W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1=P_1, \dots, \alpha_n=P_n). \quad (3.31)$$

Comme  $W$  ne dépend pas de  $t$ , on trouve :

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} \\ K(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) = P_1 \end{cases} \quad (3.32)$$

On voit que toutes les variables  $Q_i$  sont cycliques, d'où

$$\dot{P}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.33)$$

et que toutes les variables  $P_2, \dots, P_n$  sont cycliques, d'où

$$\dot{Q}_i = 0, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.34)$$

Quant à  $Q_1$ , elle est donnée par  $Q_1 = t + Q_1^0$ , puisque  $\dot{Q}_1 = \frac{\partial K}{\partial P_1} = 1$ .

Il est parfois plus avantageux de considérer la transformation plus générale

$$F_2(q_1, \dots, q_n; P_1, \dots, P_n; t) = W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1 = \beta_1(P_1, \dots, P_n), \dots, \alpha_n = \beta_n(P_1, \dots, P_n)), \quad (3.35)$$

où les  $\beta_i(P_1, \dots, P_n)$  sont des fonctions qui définissent un changement de variables.

Les nouvelles coordonnées sont données par :

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_n; \beta_1(P_1, \dots, P_n), \dots, \beta_n(P_1, \dots, P_n)) \\ Q_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial W}{\partial \beta_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial P_i} \\ K(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) = \beta_1(P_1, \dots, P_n). \end{cases} \quad (3.36)$$

Dans cette formulation généralisée, les coordonnées  $Q_i$  sont toujours cycliques, d'où  $\dot{P}_i = 0$ . Par contre,  $\dot{Q}_i = \frac{\partial \beta_1}{\partial P_i}$ , d'où

$$\boxed{Q_i(t) = \frac{\partial \beta_1}{\partial P_i} t + Q_i^0} \quad (3.37)$$

On est donc arrivé à une représentation du système où la moitié des variables sont des constantes et où l'autre moitié des variables augmentent linéairement avec le temps.

Ce type de transformation canonique est utilisé pour définir les variables action-angle (voir Section 4.3).

**NB:** Comme la constante  $\alpha_1$  est égale à l'énergie, on la note souvent  $E$ .

### 3.9 L'équation de Hamilton-Jacobi : séparation des variables

*Définition* : une variable  $q_1$  est dite séparable si on peut chercher la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi sous la forme :

$$f(q_1, \dots, q_n; t) = f_1(q_1) + f'(q_2, \dots, q_n; t). \quad (3.38)$$

Ce sera en particulier le cas si  $q_1$  et  $\frac{\partial f}{\partial q_1}$  n'apparaissent dans l'équation de Hamilton-Jacobi que par l'intermédiaire d'une expression  $\phi_1\left(q_1, \frac{\partial f}{\partial q_1}\right)$  qui ne fait pas intervenir les autres variables ou les autres dérivées partielles. L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit en effet

$$\begin{aligned} H_1\left(\phi_1\left(q_1, \frac{\partial f}{\partial q_1}\right), q_2, \dots, q_n; \frac{\partial f}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} H_1\left(\alpha_1, q_2, \dots, q_n; \frac{\partial f}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \\ \phi_1\left(q_1, \frac{\partial f}{\partial q_1}\right) = \alpha_1 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui s'écrit, en utilisant  $f_1$  et  $f'$ ,

$$\begin{cases} H_1\left(\alpha_1, q_2, \dots, q_n; \frac{\partial f'}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial f'}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial f'}{\partial t} = 0 \\ \phi_1\left(q_1, \frac{df_1}{dq_1}\right) = \alpha_1 \end{cases}$$

*Exemple* : Si  $q_1$  est cyclique, on peut choisir  $\phi_1\left(q_1, \frac{df_1}{dq_1}\right) = \frac{df_1}{dq_1}$ . On en déduit  $f_1 = \alpha_1 q_1$  et  $p_1 = \alpha_1 = \text{constante}$ .

Un système est dit *complètement séparable* si de proche en proche on peut séparer toutes les variables. On a alors :

$$\begin{aligned} f(q_1, \dots, q_n; t) &= \sum_{k=1}^n f_k(q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_n) + f_0(t) \quad (3.39) \\ \text{avec } \phi_k\left(q_k, \frac{df_k}{dq_k}\right) &= \alpha_k \\ \text{et } H_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t) + \frac{df_0}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

La solution de cette équation ne fait apparaître qu'une constante additive qui peut être négligée pour les raisons habituelles. Dans le cas où  $H$  ne dépend pas explicitement du temps, on a :

$$f_0(t) = -H_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)t \equiv -E(\alpha_1, \dots, \alpha_n)t. \quad (3.40)$$

La fonction  $S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$  qui permet de faire la transformation canonique est de la forme

$$S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) = \sum_{k=1}^n S_k(q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) + S_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t).$$

En fait, si l'on a d'abord séparé la variable  $q_1$ ,  $S_1$  ne dépend que de  $\alpha_1$  et pas des  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ ; de même, si on sépare ensuite la variable  $q_2$ ,  $S_2$  ne dépend pas des  $\alpha_3, \dots, \alpha_n$ . Par contre, il dépend de  $\alpha_1$ . Il serait donc faux de croire que  $S_k$  ne dépend que de  $\alpha_k$ , et l'écriture ci-dessus est la seule écriture générale possible.

*Exemples* : Coordonnées sphériques.

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \phi).$$

Supposons que  $U(r, \theta, \phi)$  soit de la forme

$$U(r, \theta, \phi) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}.$$

L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit :

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) \right] + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

- $H$  indépendant du temps  $\rightarrow f(r, \theta, \phi, t) = f'(r, \theta, \phi) - Et$
- $\phi$  cyclique  $\rightarrow f'(r, \theta, \phi) = f''(r, \theta) + p_\phi \phi, \quad (p_\phi = \text{constante}).$

$f''(r, \theta)$  satisfait l'équation :

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial f''}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left( \frac{\partial f''}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) \right] + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} = E.$$

On multiplie par  $r^2$  :

$$-\frac{r^2}{2m} \left( \frac{\partial f''}{\partial r} \right)^2 - r^2 a(r) + Er^2 = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial f''}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right].$$

On peut séparer  $r$  et  $\theta$  :  $f''(r, \theta) = f_1(r) + f_2(\theta)$

$$\begin{cases} \left( \frac{df_2}{d\theta} \right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = \beta \\ \frac{1}{2m} \left( \frac{df_1}{dr} \right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E \end{cases}$$



Les constantes d'intégration sont  $p_\phi, \beta$  et  $E$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow S(r, \theta, \phi; p_\phi, \beta, E; t) = & -Et + p_\phi \phi + \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \\ & + \int \sqrt{2m(E - a(r)) - \frac{\beta}{r^2}} dr. \end{aligned}$$



# Chapitre 4

## L'espace des phases

### 4.1 Définition

L'état d'un système mécanique est connu lorsqu'on se donne la position et la vitesse de chaque particule. De façon équivalente, il est déterminé par la donnée des coordonnées  $q_i$  et des impulsions  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . L'espace à  $2N$  dimensions des coordonnées et des impulsions s'appelle l'*espace des phases*. La description d'un système dans cet espace est fondamentale pour plusieurs applications :

- En physique statistique, la base microscopique de la thermodynamique, la description se fait impérativement dans l'espace des phases, la probabilité à l'équilibre pour que le système soit dans l'état  $\{q_i, p_i\}$  étant proportionnelle à  $\exp \frac{-H(p_i, q_i)}{k_B T}$  ( $k_B$  : constante de Boltzmann,  $T$  : température).
- Les systèmes intégrables, i.e. les systèmes pour lesquels on peut résoudre les équations du mouvement par quadrature, ne peuvent se décrire que dans cet espace.

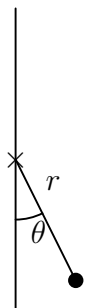
### 4.2 Systèmes à 1 degré de liberté : portrait de phase

L'exemple le plus simple est celui des systèmes à 1 degré de liberté. Dans ce cas, l'espace des phases est un espace à 2 dimensions, c'est-à-dire un plan, et les trajectoires sont des courbes dans ce plan. Dans le cas des systèmes autonomes, c'est-à-dire des systèmes décrits par un hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps, l'équation des trajectoires est donnée par

$$H(p, q) = E. \tag{4.1}$$

Une collection d'orbites représentatives d'un système s'appelle un *portrait de phase*.

*Exemple* : Considérons le pendule simple constitué d'un point matériel fixé à une corde et pouvant tourner autour d'un axe horizontal. C'est un système à un degré de liberté. L'énergie s'écrit :  $T + V$ .



$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \\ V = -mgr \cos \theta \end{cases}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - mgr \cos \theta.$$

L'équation  $H(\theta, p_\theta) = E$  conduit à

$$p_\theta = \pm \sqrt{2mr^2(E + mgr \cos \theta)}.$$

Deux cas de figure sont à distinguer :

- $-mgr \leq E < mgr$  : Pour que la racine carrée soit définie, il faut que

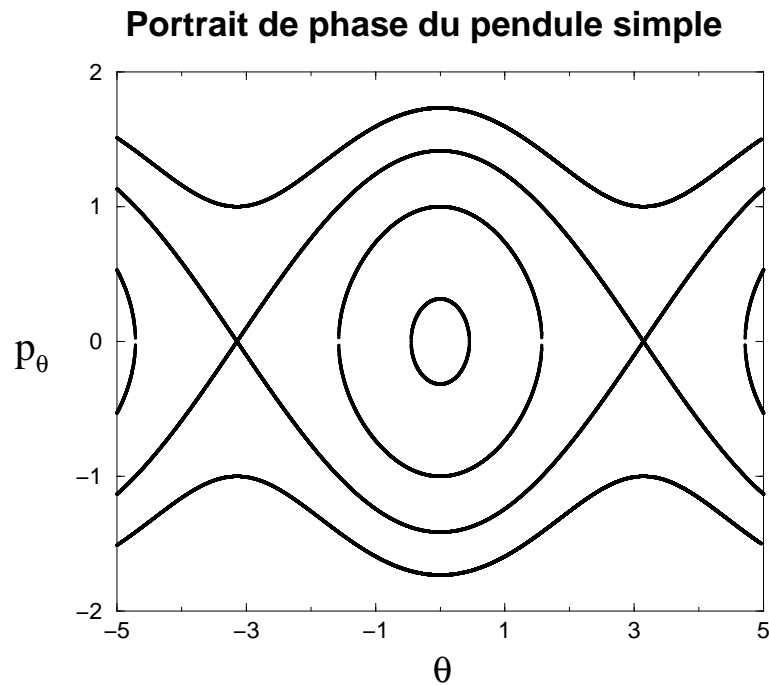
$$E + mgr \cos \theta > 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta > -\frac{E}{mgr}$$

$$\Rightarrow -\theta' < \theta < \theta', \quad \text{avec } \cos \theta' = -\frac{E}{mgr}.$$

Les orbites sont alors des courbes fermées. Le pendule oscille autour de sa position d'équilibre. Lorsque  $E$  se rapproche de sa valeur minimale  $-mgr$ ,  $\theta'$  tend vers 0. L'amplitude des oscillations est très faible. Par contre, lorsque  $E$  se rapproche de  $mgr$ ,  $\theta'$  tend vers  $\pi$ , et l'amplitude des oscillations est proche de  $2\pi$ .

- $E > mgr$  :  $p_\theta$  ne s'annule jamais et garde toujours le même signe. Le pendule tourne indéfiniment. Il est alors plus naturel de considérer  $\theta$  comme une variable allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .



### 4.3 Systèmes à 1 degré de liberté : variables action-angle

Dans l'exemple précédent, les deux types de mouvement sont périodiques. De façon générale, les équations du mouvement d'un système qui subit un mouvement périodique peuvent être mises sous une forme universelle à l'aide d'une transformation canonique vers des variables  $(Q, P)$  telles que  $P$  reste constant au cours du mouvement alors que  $Q$  augmente de  $2\pi$  pendant une période  $T$ .

Supposons qu'on ait résolu l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi à l'aide d'une fonction  $W(q, \alpha)$ . Le problème est donc de déterminer la fonction  $\beta(P)$  telle que la fonction génératrice

$$F_2(q; P) \equiv W(q; \alpha = \beta(P)) \quad (4.2)$$

conduise à une transformation canonique telle que  $P$  soit constante et telle que  $Q$  augmente de  $2\pi$  au cours d'une période. Puisque le mouvement est périodique,  $q(t + T) = q(t)$ , et le plus simple est d'exprimer  $Q$  comme fonction de  $q$ , et d'écrire la condition sur  $Q$  comme

$$\Delta Q \equiv \oint \frac{dQ}{dq} dq = 2\pi$$

où  $\oint dq$  signifie que l'on suit le mouvement sur 1 cycle.

Mais comme  $Q$  est définie par la transformation canonique engendrée par  $F_2(q; P)$ , on a :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial F_2}{\partial P} \\ \Rightarrow \frac{dQ}{dq} &= \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial F_2}{\partial P} \right) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial P^2} \frac{\partial P}{\partial q}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Mais  $\frac{\partial P}{\partial q} = 0$  puisque  $P$  est une constante.

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dq} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q \partial P}.$$

La condition s'écrit donc

$$\begin{aligned} 2\pi &= \oint \frac{\partial^2 F_2}{\partial q \partial P} dq = \frac{\partial}{\partial P} \oint \frac{\partial F_2}{\partial q} dq \\ &= \frac{\partial}{\partial P} \oint \frac{\partial W}{\partial q}(q; \alpha) dq. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Cette condition sera donc satisfaite si  $P$  et  $\alpha$  sont reliés par

$$P = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q}(q; \alpha) dq. \quad (4.5)$$

La fonction  $\beta(P)$  qui résoud le problème initialement posé est donc définie par sa fonction réciproque  $\beta^{-1}(\alpha)$  donnée par

$$\beta^{-1}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q}(q; \alpha) dq. \quad (4.6)$$

*Définition* : pour un système à 1 degré de liberté effectuant un mouvement périodique, on appelle *variables action-angle*, et on note  $(I, w)$  le couple de variables canoniquement conjuguées ( $I$  : impulsion,  $w$  : coordonnée) telles que  $I$  soit une constante et que  $w$  augmente de  $2\pi$  au cours d'une période.

Pour trouver la fonction génératrice  $F_2(q; I)$  de cette transformation canonique, on procède en plusieurs étapes :

1. On résoud l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi

$$\Rightarrow W(q; \alpha).$$

2. On détermine la fonction  $\beta$  dont la réciproque est définie par

$$I = \beta^{-1}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q}(q; \alpha) dq.$$

3. On en déduit la fonction génératrice  $F_2(q; I)$  par :

$$F_2(q; I) \equiv W(q; \alpha = \beta(I)).$$

4. La variable  $w$  est alors définie par

$$w = \frac{\partial F_2}{\partial I}.$$

5. Le nouvel hamiltonien est donné par

$$K(w; I) = \alpha = \beta(I).$$

6. La fréquence du mouvement se déduit de l'équation du mouvement pour  $w$  :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial I} = \frac{d\beta}{dI} \\ \Rightarrow w(t) &= w(0) + \frac{d\beta}{dI} t \\ \Rightarrow w(T) - w(0) &= \frac{d\beta}{dI} T \end{aligned}$$

où  $T$  est la période du mouvement. Mais par construction,  $w(T) - w(0) = 2\pi$ ,

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2\pi &= \frac{d\beta}{dI} T \\ \Rightarrow \omega &\equiv \frac{2\pi}{T} = \frac{d\beta}{dI}. \end{aligned}$$

Autrement dit, la fonction  $\beta(I)$  donne directement accès à la fréquence des oscillations.

*Remarques* : • La terminologie “angle” pour la variable  $w$  est évidente. Pour la variable  $I$ , l'appellation “variable action” vient du fait qu'on peut écrire

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq,$$

puisque  $\frac{\partial F_2}{\partial q} = p$ . Or, pour un système autonome, l'action  $S$  s'écrit :

$$S = \int (p\dot{q} - H) dt = \int p dq - Et.$$

La quantité  $\int p dq$  est appelée “action raccourcie”, et la quantité  $I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq$ , qui à  $2\pi$  près est l'intégrale de l'action raccourcie sur une période, a la dimension d'une action.

• Pour calculer la fréquence, on n'a pas besoin de résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi. En effet, pour déterminer  $\beta(I)$ , il suffit de connaître  $\frac{\partial W}{\partial q}$  en fonction de  $q$  et de  $\alpha$ , autrement dit de résoudre l'équation

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha$$

pour la variable  $\frac{\partial W}{\partial q}$ . La méthode des variables action-angle est donc une méthode très efficace pour calculer la fréquence des oscillations d'un mouvement dont on sait *a priori* qu'il est périodique sans avoir besoin d'obtenir la solution complète du problème.

*Exemple* : Oscillateur harmonique

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2.$$

Pour ce système,  $W(q; \alpha) = \pm \int_0^q dq' \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q'^2}$ . Au cours du mouvement,  $q$  oscille entre les valeurs maximales définies par

$$\begin{aligned} H(p=0, q) &= \alpha \\ \Rightarrow & -\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \leq q \leq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \\ \Rightarrow I = \beta^{-1}(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}} \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} dq - \int_{\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}}^{-\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}} \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} dq \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Posons } q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin \theta &\Rightarrow dq = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \cos \theta d\theta \\ \Rightarrow & \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} = \sqrt{2m\alpha} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2m\alpha} \cos^2 \theta d\theta - \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \sqrt{2m\alpha} \cos^2 \theta d\theta \right) \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} = \frac{\alpha}{\omega}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\beta^{-1}(\alpha) = \frac{\alpha}{\omega}$

$$\Rightarrow \beta(I) = \omega I,$$

$$\Rightarrow F_2(q; I) \equiv W(q; \beta(I)) = \pm \int_0^q dq' \sqrt{2mI\omega - m\omega^2 q'^2}$$

La fréquence des oscillations est donnée par  $\frac{d\beta}{dI} = \omega$ , comme il se doit.



## 4.4 Systèmes séparables : variables action-angle

Considérons un système à  $n$  degrés de liberté complètement séparable, et supposons que le mouvement par rapport à chaque paire  $(q_k, p_k)$  soit périodique. Supposons par ailleurs que le système soit autonome. L'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi possède donc une solution qui s'écrit

$$W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_k W_k(q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (4.7)$$

Par analogie avec le cas d'un degré de liberté, on peut chercher une transformation canonique vers des variables telles que la moitié d'entre elles soient des constantes et l'autre moitié augmente de  $2\pi$ . Cette transformation sera *a priori* engendrée par une fonction génératrice de la forme

$$F_2(q_1, \dots, q_n; I_1, \dots, I_n) = W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1 = \beta_1(I_1, \dots, I_n), \dots, \alpha_n = \beta_n(I_1, \dots, I_n)). \quad (4.8)$$

Le raisonnement fait dans le cas d'une variable se généralise sans problème. Les variables  $I_k$  sont définies par

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_k}{\partial q_k}(q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_n) dq_k \quad (4.9)$$

où l'intégration se fait suivant une orbite de la paire  $(q_k, p_k)$ . Ces équations constituent un système de  $n$  équations reliant les  $I_k$  aux  $\alpha_k$ . Ce système permet donc d'exprimer les  $\alpha_k$  en fonction des  $I_k$  :  $\alpha_k = \beta_k(I_1, \dots, I_n)$ . La transformation canonique engendrée par la fonction génératrice  $F_2(q_1, \dots, q_n; I_1, \dots, I_n)$  définie à partir de  $W$  à l'aide de ces fonctions  $\beta_1(I_1, \dots, I_n), \dots, \beta_n(I_1, \dots, I_n)$  conduit, d'après la théorie générale, aux équations du mouvement suivantes pour les variables  $w_k$  :

$$\dot{w}_k = \frac{\partial \beta_1(I_1, \dots, I_n)}{\partial I_k}. \quad (4.10)$$

La quantité  $\omega_k = \frac{\partial \beta_1}{\partial I_k}$  est la fréquence du mouvement pour les variables  $(q_k, p_k)$ .

**NB:** Comme la constante  $\alpha_1$  est égale à l'énergie, on la note souvent  $E$ . Le problème revient donc à exprimer l'énergie en fonction des variables actions  $I_k$ . On en déduit les fréquences par

$$\omega_k = \frac{\partial E}{\partial I_k}.$$

### Intérêt des variables action-angle

1. Comme dans le cas à un degré de liberté, les fréquences peuvent être calculées sans résoudre l'équation différentielle de Hamilton-Jacobi, autrement dit sans

obtenir explicitement la solution complète des équations du mouvement. En effet, au cours de la séparation des variables, on est conduit à des équations pour chacune des dérivées partielles  $\frac{\partial W}{\partial q_k}$ . Pour calculer les variables action

$I_k$ , il suffit d'extraire de ces équations les quantités  $\frac{\partial W}{\partial q_k}$  en fonction de  $q_k$  et des  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Il n'est pas nécessaire d'intégrer ces équations différentielles.

2. **Nature du mouvement** : le mouvement dépend des relations entre les  $n$  fréquences  $\omega_k$ . Si elles sont incommensurables, le mouvement global n'est pas périodique. Si elles sont toutes commensurables, le mouvement est périodique.
3. **Intégrales premières** : si deux fréquences sont commensurables, on parle de dégénérescence. On peut montrer que dans ce cas de nouvelles intégrales premières qui sont des fonctions univoques des coordonnées apparaissent (voir problème de Kepler et vecteur de Lenz).
4. **Séparation des variables dans plusieurs systèmes de coordonnées** : on peut aussi démontrer que s'il y a dégénérescence il y a séparation des variables pour plusieurs systèmes de coordonnées (voir problème de Kepler et coordonnées paraboliques).
5. **Mécanique quantique** : si un système est séparable et périodique, les états possibles du système d'après la mécanique quantique sont déterminés par :

$$I_k = n_k \hbar, \quad n_k \text{ entier, } \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad h = \text{constante de Planck.} \quad (4.11)$$

Cette méthode a fourni la première théorie quantique (voir problème de Kepler). Ces règles de quantification sont connues sous le nom de règles de Bohr-Sommerfeld. Malheureusement, la méthode ne peut pas être étendue aux systèmes non intégrables, et elle a été abandonnée au profit de méthodes plus efficaces (voir cours de Mécanique Quantique).

## 4.5 Systèmes intégrables

Pour un système séparable, et tel que le mouvement par rapport à chaque paire  $(q_k, p_k)$  soit périodique, on a explicitement construit une transformation canonique pour laquelle la moitié des variables, à savoir les variables action  $I_k$ , sont des constantes du mouvement. Par ailleurs, puisque la transformation est canonique, on a :

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

*Définition* : Un système à  $n$  degrés de liberté est dit intégrable s'il existe  $n$  intégrales premières indépendantes satisfaisant

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

On dit que ces intégrales premières sont en *involution*.

*Remarques* :

1. Tout système complètement séparable est intégrable, mais la réciproque n'est pas vraie. L'exemple le plus célèbre est le réseau de Toda défini par l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n p_i^2 + V_0 \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{q_i - q_{i+1}}{a}\right), \quad q_{n+1} \equiv q_1, \quad (4.13)$$

pour lequel on peut construire  $n$  intégrales premières en involution, mais qui n'admet pas de séparation des variables.

2. On peut construire des variables action-angle sans invoquer la séparation des variables. L'idée de base est la suivante : l'existence de  $n$  intégrales premières impose au mouvement de rester sur un tore de dimension  $n$ . L'intégrale le long d'un chemin fermé sur le tore est un invariant topologique *et* une constante du mouvement.
3. On pense que, dans le cas générique, un système mécanique n'est pas intégrable (on n'a pas de preuve ! On ne connaît que quelques exemples où l'on a pu prouver que le système n'était pas intégrable). L'absence d'intégrabilité peut avoir des conséquences très importantes sur l'évolution des systèmes aux temps longs, avec l'apparition de chaos (voir chapitre suivant).

## 4.6 Théorème de Liouville

Le lien entre la thermodynamique et la mécanique est basé sur la description statistique des systèmes à plusieurs degrés de liberté. Dans le cadre de cette description, la quantité de base est la probabilité de trouver un système mécanique donné dans un état donné. Comme l'état d'un système est défini par les positions et les vitesses des particules, il pourrait sembler logique d'utiliser les  $q_i, \dot{q}_i$  pour définir cette probabilité. En réalité, il est nettement préférable d'utiliser les coordonnées et les impulsions, c'est-à-dire l'espace des phases. La raison fondamentale de ce choix réside dans le fait que le volume de l'espace des phases est conservé lorsqu'on effectue une transformation canonique, et donc en particulier au cours de l'évolution du système.

Considérons en effet un volume  $V$  défini par

$$V = \int_{\Omega} \prod_i dp_i dq_i, \quad \Omega = \text{domaine dans l'espace des phases.} \quad (4.14)$$

Si on fait une transformation canonique vers les variables  $Q_i, P_i$ , le domaine  $\Omega$  devient  $\Omega'$ , et le volume correspondant devient  $V' = \int_{\Omega'} \prod_i dQ_i dP_i$ .

**Proposition 4.1.**  $V = V'$ .

En effet, effectuons le changement de variable dans l'intégrale donnant  $V$ . On trouve

$$V = \int_{\Omega'} D \prod_i dP_i dQ_i \quad (4.15)$$

où  $D$  est le jacobien, c'est-à-dire le déterminant de la matrice des dérivées des anciennes variables par rapport aux nouvelles. En utilisant les notations compactes, on a

$$\begin{cases} V = \int_{\Omega} d\vec{x}, & V' = \int_{\Omega'} d\vec{y} \\ D = \det(M^{-1}). \end{cases} \quad (4.16)$$

Mais comme  $M$  est symplectique,

$$\begin{aligned} \det M &= \det(M^{-1}) = 1 \quad \Rightarrow \quad D = 1 \\ \Rightarrow \quad V &= \int_{\Omega'} D d\vec{y} = \int_{\Omega'} d\vec{y} = V'. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Une extension importante de cette proposition est que le volume dans l'espace des phases est conservé au cours du temps. Pour démontrer cela, il suffit de démontrer que si le système est décrit par  $\vec{x}$  à l'instant 0 et par  $\vec{y}_t(\vec{x})$  à l'instant  $t$ , la matrice  $M$  définie par

$$M_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

est symplectique.

Pour simplifier les notations, on définit l'opérateur différentiel  $D : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$  :

$$D\vec{y} = \left( \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \right) = M. \quad (4.17)$$

L'équation du mouvement en notations compactes s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{y}_t(\vec{x}) = J \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y}_t(\vec{x}). \quad (4.18)$$

Si on applique l'opérateur différentiel de part et d'autre, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(D\vec{y}) = J \left[ D \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y} \right] (D\vec{y}), \quad (4.19)$$

ou encore

$$-J \frac{\partial}{\partial t}(D\vec{y}) = \left( D \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y} \right) (D\vec{y}). \quad (4.20)$$

Prenant la transposée, il vient :

$$-\frac{\partial}{\partial t} {}^t(D\vec{y}) {}^tJ = {}^t(D\vec{y}) {}^t \left( D \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y} \right), \quad (4.21)$$

soit, puisque  ${}^tJ = -J$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} {}^t(D\vec{y}) J = {}^t(D\vec{y}) {}^t \left( D \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y} \right). \quad (4.22)$$

En multipliant (4.20) par  $-{}^t(D\vec{y})$  à gauche et (4.22) par  $(D\vec{y})$  à droite, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ {}^t(D\vec{y}) J (D\vec{y}) \right] = {}^t(D\vec{y}) \left[ {}^t \left( D \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y} - D \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \circ \vec{y} \right] (D\vec{y}). \quad (4.23)$$

Mais  $\left( D \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right)_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}$  est symétrique, d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ {}^t(D\vec{y}) J (D\vec{y}) \right] &= 0 \\ \Rightarrow {}^t(D\vec{y}) J (D\vec{y}) &= \text{cte} = J \end{aligned} \quad (4.24)$$

puisque  $D\vec{y}|_{t=0} = \mathbb{1}$ .

C.Q.F.D.

Cette propriété est connue sous le nom de *Théorème de Liouville* : le volume de l'espace des phases est conservé au cours du temps. Cette propriété est fondamentale pour la définition de l'équilibre thermodynamique. Une démonstration plus générale de ce résultat sera donnée au paragraphe 5.2 du chapitre suivant.



# Chapitre 5

## Introduction aux systèmes dynamiques

### 5.1 Définitions

Un *système dynamique* est un système dont l'état est décrit par un vecteur  $\vec{x}$  à  $n$  composantes et dont l'évolution est régie par une équation différentielle du premier ordre du type

$$\dot{\vec{x}} = \overrightarrow{F}(\vec{x}). \quad (5.1)$$

*Exemple* : Un système hamiltonien est un système dynamique. En effet, en notation compacte,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= J \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) = \overrightarrow{F}(\vec{x}), \\ \text{avec } F_i(\vec{x}) &= \sum_j J_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par contre, tous les systèmes dynamiques ne sont pas des systèmes hamiltoniens. Par exemple, la description d'un système macroscopique peut se faire à l'aide de quelques degrés de liberté pour lesquels les équations du mouvement ont un terme dissipatif. De tels systèmes ne peuvent pas être décrits par un hamiltonien. Par ailleurs, dans beaucoup d'autres contextes, des équations de ce type apparaissent. L'objet de ce chapitre est de discuter un certain nombre d'aspects des propriétés de ces systèmes.

Pour un tel système, il passe en général une et une seule solution par un point donné  $\vec{x}_0$ . On appelle *flot* et on note  $\phi_t(\vec{x}_0)$  la solution  $\vec{x}(t)$  telle que  $\vec{x}(t=0) = \vec{x}_0$ .

## 5.2 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Soit  $V \equiv V(0)$  le volume d'un domaine  $M$  dans l'espace à  $n$  dimensions,

$$V = \int_M dx_1 \dots dx_n \quad (5.2)$$

et soit  $V(t)$  le volume de son image  $\phi_t(M)$ .

$$V(t) = \int_{\phi_t(M)} dy_1 \dots dy_n = \int_M J(t, x) dx_1 \dots dx_n \quad (5.3)$$

où  $J(t, x)$  est le jacobien de la transformation de  $\vec{x} \mapsto \vec{y} \equiv \phi_t(\vec{x})$ .

Essayons de calculer  $\frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(\Delta t) - V(0)}{\Delta t}$ .

Au premier ordre en  $\Delta t$ , on a :

$$\vec{y} = \vec{x} + \overrightarrow{F}(\vec{x})\Delta t + O(\Delta t^2) \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Delta t. \quad (5.5)$$

Posons  $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ . Le jacobien de cette transformation,  $\det(\mathbb{1} + A\Delta t)$ , est un polynôme de degré  $n$  en  $\Delta t$ . Pour calculer la dérivée  $\frac{dV}{dt}$ , il suffit de connaître le terme d'ordre 1, c'est-à-dire linéaire en  $\Delta t$ . Mais  $\mathbb{1} + A\Delta t$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 + A_{11}\Delta t & A_{12}\Delta t & A_{13}\Delta t & \dots \\ A_{21}\Delta t & 1 + A_{22}\Delta t & A_{23}\Delta t & \dots \\ A_{31}\Delta t & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}.$$

Faisons un développement du déterminant selon la première colonne. Il vient

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{1} + A\Delta t) &= (1 + A_{11}\Delta t) \begin{vmatrix} 1 + A_{22}\Delta t & A_{23}\Delta t & \dots \\ A_{32}\Delta t & 1 + A_{33}\Delta t & \dots \\ \vdots & & \end{vmatrix} \\ &\quad - A_{21}\Delta t \begin{vmatrix} A_{12}\Delta t & A_{13}\Delta t & \dots \\ \vdots & & \end{vmatrix} \\ &\quad + A_{31}\Delta t \begin{vmatrix} A_{12}\Delta t & A_{13}\Delta t & \dots \\ \vdots & & \end{vmatrix} \end{aligned}$$



$A_{n1}\Delta t$  est facteur d'un déterminant dont la première ligne est  $(A_{12}\Delta t \ A_{13}\Delta t \ \dots)$ . Le terme correspondant est donc d'ordre supérieur ou égal à 2 et peut être omis. Ainsi

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{1} + A\Delta t) &= (1 + A_{11}\Delta t)(1 + A_{22}\Delta t) \dots (1 + A_{nn}\Delta t) + O(\Delta t^2) \\ &= 1 + \left(\sum_i A_{ii}\right)\Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= 1 + (\text{Tr}A)\Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= 1 + (\text{div } \vec{F})\Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (5.6)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} V(\Delta t) &= V(0) + \int_M \text{div } \vec{F} \, d\vec{x} \, \Delta t \\ \Rightarrow &\boxed{\frac{dV}{dt} = \int_M \text{div } \vec{F} \, d\vec{x}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Un système est dit *conservatif* en  $\vec{x}$  si  $\text{div } \vec{F} = 0$  et *dissipatif* si  $\text{div } \vec{F} < 0$ .

*Exemples :*

1. Système hamiltonien :  $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ .

$$\text{div } \vec{F} = \sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \sum_i \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} = 0.$$

Les systèmes hamiltoniens sont conservatifs. On retrouve le Théorème de Liouville.

2. Force de frottement proportionnelle à la vitesse :  $\ddot{z} = \frac{-\dot{z}}{\tau}$ . Posons  $\dot{z} = x$ . L'évolution est régie par l'équation  $\dot{x} = -\frac{x}{\tau} = F(x)$ , d'où

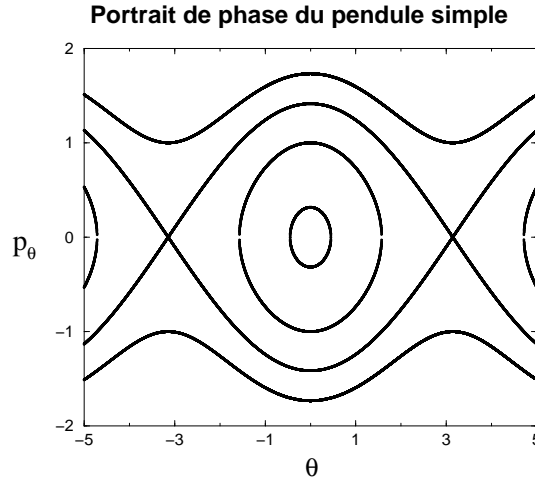
$$\text{div } \vec{F} = -\frac{1}{\tau} < 0.$$

Le système est dissipatif.

### 5.3 Points fixes et stabilité

Un *point fixe* (ou *point d'équilibre* ou *point singulier*) est un point  $\vec{x}_*$  qui satisfait  $\vec{F}(\vec{x}_*) = \vec{0}$ . Un tel point peut être commun à plusieurs trajectoires.

Exemple : Pendule simple



$$\begin{cases} \dot{p}_\theta = -mgr \sin \theta = 0 \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = 0 \end{cases}$$

On a deux points fixes :

- $\theta = 0$  ( $E = -mgr$ )
- $\theta = \pi$  ( $E = mgr$ )

Les points fixes ne sont pas tous équivalents du point de vue de la stabilité. De façon générale, on distingue 3 types de points fixes:

- $\vec{x}_*$  est *asymptotiquement stable* s'il existe un voisinage de  $\vec{x}_*$  tel que, pour tout  $\vec{x}$  dans ce voisinage,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(\vec{x}) = \vec{x}_*$ .
- $\vec{x}_*$  est *stable* s'il existe un voisinage de  $\vec{x}_*$  tel que, pour tout  $\vec{x}$  dans ce voisinage,  $\phi_t(\vec{x})$  reste dans un voisinage de  $\vec{x}_*$   $\forall t > 0$ .
- $\vec{x}_*$  est *instable* sinon.

Pour étudier la stabilité d'un point singulier, la première étape consiste à faire une linéarisation des équations au voisinage du point singulier. Plus précisément, on pose  $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}_*$  et on ne garde que les termes linéaires en  $\vec{y}$  :

$$\dot{\vec{y}} = \dot{\vec{x}} = \vec{F}(x) = \vec{F}(\vec{x}_* + \vec{y}) = \vec{F}(\vec{x}_*) + \frac{D\vec{F}}{D\vec{x}}(\vec{x}_*)\vec{y} + \dots \quad (5.8)$$

avec  $A \equiv \frac{D\vec{F}}{D\vec{x}}(\vec{x}_*)$ ,  $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}_*)$ .

On doit donc étudier l'équation  $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$ .

La solution de cette équation est

$$\vec{y}(t) = e^{At}\vec{y}(0),$$

où l'exponentielle d'une matrice est définie par

$$\exp(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \exp(At) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\exp(At)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} A^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= A \sum_{p=0}^{+\infty} A^p \frac{t^p}{p!} = A \exp(At) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\exp(At))\vec{y}(0) &= A \exp(At)\vec{y}(0) = A\vec{y}(t). \end{aligned} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Supposons que la matrice  $A$  soit diagonalisable, et désignons par  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ses valeurs propres, *a priori* complexes, et par  $\vec{z}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , les vecteurs propres associés.

Dans  $\mathbb{C}^n$ , l'équation

$$\dot{\vec{z}} = A\vec{z} \quad (5.9)$$

peut être simplement résolue en décomposant  $\vec{z}$  dans la base des vecteurs propres de  $A$ . Posons en effet :

$$\vec{z}(t) = \sum_j c_j(t) \vec{z}_j. \quad (5.10)$$

L'équation  $\dot{\vec{z}} = A\vec{z}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_j \dot{c}_j(t) \vec{z}_j &= \sum_j a_j c_j(t) \vec{z}_j \\ \Rightarrow \dot{c}_j(t) &= a_j c_j(t), \quad j = 1, \dots, n \\ \Rightarrow c_j(t) &= c_j(0) e^{a_j t}. \end{aligned}$$

La solution générale s'écrit donc

$$\vec{z} = \sum_j c_j e^{a_j t} \vec{z}_j. \quad (5.11)$$

Mais comme  $A$  est une matrice réelle, si  $\vec{z}$  est solution,  $\text{Re}(\vec{z})$  est aussi solution. En effet, la partie réelle de l'équation  $\dot{\vec{z}} = A\vec{z}$  s'écrit  $\frac{d}{dt}(\text{Re} \vec{z}) = A \text{Re} \vec{z}$ .

La solution générale dans  $\mathbb{R}^n$  s'écrit donc :

$$\vec{y} = \text{Re} \left( \sum_{j=1}^n c_j e^{a_j t} \vec{z}_j \right), \quad c_j \in \mathbb{C}. \quad (5.12)$$

La stabilité dépend du signe des parties réelles des  $a_j$ . On peut démontrer les résultats suivants:

- Si  $\operatorname{Re} a_j < 0, \forall j$ , alors  $\vec{x}_*$  est *asymptotiquement stable*.
- Si  $\operatorname{Re} a_j > 0$  pour au moins une valeur de  $j$ ,  $\vec{x}_*$  est instable.

Dans le cas où  $\operatorname{Re} a_j \leq 0$  pour tout  $j$ , et où  $\operatorname{Re} a_j = 0$  pour au moins une valeur de  $j$ , l'analyse du problème linéarisé ne permet pas de conclure, et la stabilité dépend des termes non linéaires. L'étude de la stabilité au-delà de la linéarisation est un sujet complexe qui sort du cadre de ce cours.

*Remarque* : Seuls les systèmes dissipatifs peuvent avoir des points singuliers asymptotiquement stables. En effet,  $\operatorname{Re} a_j < 0 \forall j \Rightarrow \operatorname{Tr} A < 0$ . Ainsi, pour les systèmes conservatifs, et en particulier les systèmes hamiltoniens, les points fixes sont au mieux stables. L'étude des oscillations autour des points fixes stables des systèmes hamiltoniens fait l'objet du paragraphe suivant.

## 5.4 Petites oscillations: Le point de vue hamiltonien

Le problème général des petites oscillations a été traité au chapitre 2 dans le cadre du formalisme lagrangien. On peut également le traiter dans le cadre du formalisme hamiltonien. Comme les équations de Hamilton sont des équations différentielles du premier ordre, ce problème est un exemple de système dynamique.

Nous repartons donc d'un système décrit par le potentiel

$$V(\vec{q}) = V(\vec{q}_*) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} (q_i - q_{i*})(q_j - q_{j*}). \quad (5.13)$$

où  $\vec{q}_* = (q_{1*}, \dots, q_{n*})$  est la position d'équilibre. Les notations sont celles de la section 2.3, et l'on se propose de refaire le même calcul dans le cadre du formalisme hamiltonien.

Première étape : Transformation de Legendre.

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - V(\vec{q}) \quad (5.14)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_{ij} \dot{q}_j \quad (5.15)$$

$$\text{soit } \vec{p} = M \dot{\vec{q}} \Rightarrow \dot{\vec{q}} = M^{-1} \vec{p} \quad (5.16)$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^t M \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \vec{p}^t M^{-1} M M^{-1} \vec{p} = \frac{1}{2} \vec{p}^t M^{-1} \vec{p} \quad (5.17)$$

soit

$$T = \frac{1}{2} {}^t \vec{p} M^{-1} \vec{p} \quad (5.18)$$

puisque  ${}^t M^{-1} = M^{-1}$  vu que  $M$  est symétrique. Ainsi

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = {}^t \vec{p} M^{-1} \vec{p} - \frac{1}{2} {}^t \vec{p} M^{-1} \vec{p} + V(\vec{q}) = \frac{1}{2} {}^t \vec{p} M^{-1} \vec{p} + V(\vec{q}). \quad (5.19)$$

Deuxième étape : Point fixe.

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_j (M^{-1})_{ij} p_j = 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

Les conditions  $\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$  sont équivalentes à celles dérivées du lagrangien.

Les conditions  $\sum_j (M^{-1})_{ij} p_j = 0 \forall i$  impliquent que  $p_j = 0 \forall j$  car  $\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1} \neq 0$ .

Troisième étape : Equations linéarisées. Posons

$$y_i = \begin{cases} q_i - q_{i*}, & i = 1, \dots, n \\ p_{i-n}, & i = n+1, \dots, 2n \end{cases} \quad (5.21)$$

Les équations du mouvement obtenues en remplaçant  $V$  par son développement de Taylor au second ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{y}_i = \sum_{j=1}^n (M^{-1})_{ij} y_{j+n} & i = 1, \dots, n \\ \dot{y}_i = -\sum_{j=1}^n K_{(i-n)j} y_j & i = n+1, \dots, 2n \end{cases} \quad (5.22)$$

La matrice  $A$  définie par  $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  est donc donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ -K & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

La solution générale est donc de la forme

$$\vec{y} = \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^n c_j e^{a_j t} \vec{z}_j \right), \quad (5.24)$$

où les  $a_j$  sont les valeurs propres de  $A$  et les  $\vec{z}_j$  les vecteurs propres associés. L'équation caractéristique de ces valeurs propres s'écrit :

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_{2n}) = 0 \quad (5.25)$$

soit

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda \mathbb{1}_n & M^{-1} \\ -K & -\lambda \mathbb{1}_n \end{pmatrix} = 0. \quad (5.26)$$

**Proposition 5.1.**  $\det(A - \lambda \mathbb{1}_{2n}) = 0 \Leftrightarrow \det(-M\omega^2 + K) = 0$ , avec  $\lambda = i\omega$ .

*Démonstration :*

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_{2n}) = \lambda^{2n} \det(\mathbb{1}_{2n} - A\lambda^{-1})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{2n} - A\lambda^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & -M^{-1}\lambda^{-1} \\ K\lambda^{-1} & \mathbb{1}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ K\lambda^{-1} & \mathbb{1}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & -M^{-1}\lambda^{-1} \\ 0 & \mathbb{1}_n + KM^{-1}\lambda^{-2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(\mathbb{1}_{2n} - A\lambda^{-1}) &= \det(\mathbb{1}_n + KM^{-1}\lambda^{-2}) \\ \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{1}_{2n}) &= \det(\lambda^2 \mathbb{1}_n + KM^{-1}) \\ &= \det(\lambda^2 M + K) \underbrace{\det(M^{-1})}_{\neq 0} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{1}_{2n}) = 0 &\Leftrightarrow \det(\lambda^2 M + K) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(-\omega^2 M + K) = 0, \end{aligned}$$

puisque  $\lambda^2 = -\omega^2$ .

C.Q.F.D.

*Conséquence :* Puisque les  $\omega_j$  sont réels, les valeurs propres  $a_j = i\omega_j$  sont imaginaires pures. On a donc des oscillations non amorties.

### Expression avec les coordonnées normales

Si on désigne par  $P_i$  l'impulsion généralisée conjuguée de  $Q_i$ , l'hamiltonien prend la forme

$$H = \frac{1}{2} \sum_i (P_i^2 + \omega_i^2 Q_i^2). \quad (5.29)$$

L'hamiltonien est la somme d'hamiltoniens indépendants décrivant des oscillateurs harmoniques de fréquences  $\omega_i$ . Le système est évidemment séparable. Les intégrales premières sont les énergies  $E_i = \frac{1}{2} (P_i^2 + \omega_i^2 Q_i^2)$  des différents oscillateurs. Les variables actions associées sont données par  $I_i = E_i/\omega_i$ . En mécanique quantique, les niveaux d'énergie possibles sont donc  $E = \sum_i \hbar\omega_i n_i$ ,  $n_i$  entier, à une constante près.

## 5.5 Orbites périodiques et problème à 3 corps restreint

Lorsqu'on a déterminé les points fixes, leur stabilité et éventuellement les petites oscillations autour des points fixes stables, l'étape suivante par ordre de difficulté croissante consiste à chercher s'il existe des orbites périodiques particulières qui satisfont aux équations du mouvement et d'étudier leur stabilité. Plutôt que de faire la théorie générale de telles orbites, nous allons étudier un cas particulier tiré de la mécanique céleste, le problème à 3 corps.

Alors que le problème de Kepler à deux corps est intégrable, le problème à 3 corps n'a pas de solution exacte. Du coup, l'existence d'orbites périodiques stables n'est pas garantie a priori. Le mouvement des planètes dans le système solaire suggère néanmoins l'existence de solutions stables pour le problème de Kepler à  $n$  corps. Nous allons démontrer l'existence de telles solutions dans le cas du problème à 3 corps restreint.

### Définition du problème

On considère 3 astres assimilés à des points matériels de masses  $m$ ,  $m_1$  et  $m_2$  qui interagissent via l'attraction gravitationnelle. On suppose par ailleurs que  $m$  est suffisamment petite pour ne pas influencer le mouvement de  $m_1$  et  $m_2$ , et que  $m_1$  et  $m_2$  tournent autour de leur centre de gravité à la vitesse angulaire  $\omega$ . Étudier le mouvement de  $m$  dans le champ gravitationnel de  $m_1$  et  $m_2$ . Démontrer en particulier l'existence de solutions telles que  $m$  reste à une distance fixe de  $m_1$  et  $m_2$ , et discuter leur stabilité.

*Première étape* : étudions brièvement le problème à 2 corps. Soient  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  les positions de  $m_1$  et  $m_2$ . Les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_2} \end{cases} \quad (5.30)$$

avec  $V = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ . On définit de nouvelles coordonnées par :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = (m_1 + m_2)\vec{R}, & \vec{R} : \text{centre d'inertie} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r}_2 = \frac{-m_1}{m_1+m_2}\vec{r} + \vec{R}. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Le mouvement du centre de masse est rectiligne uniforme. Si on se place dans le référentiel du centre de masse,  $\vec{R} = \vec{0}$ .

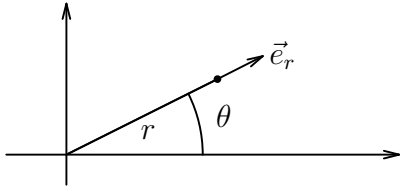
$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 - m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = -2\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}, \quad V = -\frac{Gm_1m_2}{r} \quad (5.32)$$

soit

$$\tilde{m}\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}, \quad \tilde{m} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} = \text{masse réduite.} \quad (5.33)$$

Pour la variable  $\vec{r}$ , on a un mouvement central. Le moment cinétique  $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge \tilde{m}\dot{\vec{r}}$  est conservé  $\Rightarrow$  mouvement plan.

Dans le plan du mouvement, introduisons des coordonnées polaires.



$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{\sigma} = \vec{r} \wedge \tilde{m}\dot{\vec{r}} &= \tilde{m}r^2\dot{\theta}\vec{e}_z = \sigma\vec{e}_z \end{aligned}$$

Le lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ T = \frac{1}{2}\tilde{m}\vec{v}^2 &= \frac{1}{2}\tilde{m}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\tilde{m}r^2\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\tilde{m}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{(\tilde{m}r^2\dot{\theta})^2}{\tilde{m}r^2} \\ &= \frac{1}{2}\tilde{m}\dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2\tilde{m}r^2} \end{aligned} \quad (5.35)$$

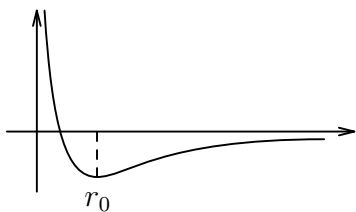
$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\tilde{m}\dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2\tilde{m}r^2} - V(r). \quad (5.36)$$

L'énergie s'écrit donc :

$$E = \frac{1}{2}\tilde{m}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r), \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{\sigma^2}{2\tilde{m}r^2} - V(r). \quad (5.37)$$



*Solution particulière :*



$$\begin{cases} r = r_0 = \text{cste} = \text{minimum de } U_{\text{eff}} \\ E = \frac{\sigma^2}{2\tilde{m}r_0^2} + V(r_0) \end{cases} \Rightarrow \dot{r} = 0.$$

*N.B. :*

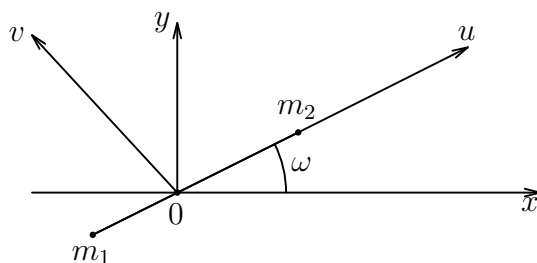
$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{eff}}}{dr} &= -\frac{\sigma^2}{\tilde{m}r^3} + \frac{Gm_1m_2}{r^2} = 0 \\ \Rightarrow &-\frac{\tilde{m}^2r^4\dot{\theta}^2}{\tilde{m}r^3} + \frac{Gm_1m_2}{r^2} = 0 \\ \Rightarrow &\dot{\theta}^2 = \frac{Gm_1m_2}{r^3} \\ \Rightarrow &\omega = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{r^3}} \end{aligned}$$

*Notations réduites :* On choisit un système d'unités dans lequel  $G = 1$ ,  $r$ ,  $m_1 + m_2 = 1$ , et on pose  $m_2 = \mu$ . Les autres grandeurs sont alors données par  $m_1 = 1 - \mu$ ,  $r_1 = \mu$ ,  $r_2 = 1 - \mu$  et  $\omega = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{r^2}} = 1$ . Dans le référentiel  $(0xy)$ , le lagrangien qui décrit le mouvement de  $m$  s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V \quad (5.38)$$

$$V = -m\frac{1-\mu}{\rho_1} - m\frac{\mu}{\rho_2} \quad (5.39)$$

où  $\rho_1, \rho_2$  sont les distances de  $m$  à  $m_1$  et  $m_2$  et dépendent du temps.



Il est plus commode de passer dans le référentiel  $(0uv)$  lié aux astres  $m_1$  et  $m_2$ . Dans ce référentiel, la vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{u}\vec{i}' + \dot{v}\vec{j}' + \omega\vec{k} \wedge (u\vec{i}' + v\vec{j}') \\ &= (\dot{u} - v\omega)\vec{i}' + (\dot{v} + u\omega)\vec{j}' \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}m(\dot{u} - v\omega)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{v} + u\omega)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\dot{v}^2 + m\omega(u\dot{v} - v\dot{u}) + \frac{1}{2}m\omega^2(u^2 + v^2). \quad (5.41)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, les distances  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont données par :

$$\begin{cases} \rho_1^2 = (u + \mu)^2 + v^2 \\ \rho_2^2 = (u - 1 + \mu)^2 + v^2. \end{cases} \quad (5.42)$$

Le lagrangien du problème à 3 corps s'écrit donc :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + m(u\dot{v} - v\dot{u}) - mU(u, v) \quad (5.43)$$

où  $((u, v)$  est un potentiel effectif donné par :

$$U = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{1 - \mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2}. \quad (5.44)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m\dot{u} - mv \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = m\dot{v} + mu \\ \frac{\partial L}{\partial u} = m\dot{v} - \frac{\partial U}{\partial u} \\ \frac{\partial L}{\partial v} = -m\dot{u} - \frac{\partial U}{\partial v} \end{cases} \quad (5.45)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{u} - m\dot{v} - m\dot{v} + m\frac{\partial U}{\partial u} = 0 \\ m\ddot{v} + m\dot{u} + m\dot{u} + m\frac{\partial U}{\partial v} = 0 \end{cases} \quad (5.46)$$

$$\text{soit } \begin{cases} \ddot{u} = 2\dot{v} - \frac{\partial U}{\partial u} \\ \ddot{v} = -2\dot{u} - \frac{\partial U}{\partial v} \end{cases} \quad (5.47)$$

*Remarque :* on peut arriver à ces équations par les formules habituelles de l'accélération en incluant les termes d'entraînement et de Coriolis.

Comme le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, il y a une intégrale première :

$$\begin{aligned}
h(u, v, \dot{u}, \dot{v}) &= \dot{u}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \dot{v}\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} - L = \text{cte} \\
\Rightarrow m\dot{u}^2 - m\dot{u}\dot{v} + m\dot{v}^2 + m\dot{u}\dot{v} & \quad (5.48)
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}m\dot{u}^2 - \frac{1}{2}m\dot{v}^2 - m\dot{u}\dot{v} + m\dot{u}\dot{v} + mU(u, v) = E_0 \quad (5.49)$$

$$\frac{1}{2m}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + mU(u, v) = E_0. \quad (5.50)$$

On cherche des solutions telles que le corps de masse  $m$  soit au repos dans le référentiel  $(0uv)$  puisqu'il doit être à une distance fixe de  $m_1$  et  $m_2$ ,  $\Rightarrow \dot{u}, \dot{v} = 0$ .

Comme dans le cas du problème à 2 corps, si on se place à un extremum de  $U$ , la trajectoire d'énergie  $E_0 = mU$  correspond à  $\dot{u} = \dot{v} = 0$ , soit  $u, v = \text{constante}$ .

Cherchons donc les extremums de  $U$ . Ils sont donnés par

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial v} = 0 \end{cases} \quad (5.51)$$

avec

$$\frac{\partial U}{\partial u} = -u - (1 - \mu) \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\rho_1^3} 2(u + \mu) - \mu \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\rho_2^3} 2(u - 1 + \mu) \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial U}{\partial v} = -v + v \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} + v \frac{\mu}{\rho_2^3} \quad (5.53)$$

soit

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial v} = -v f(u, v) \\ \frac{\partial U}{\partial u} = -u f(u, v) + \mu(1 - \mu) \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3}\right) \end{cases} \quad (5.54)$$

avec

$$f(u, v) = 1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}.$$

1<sup>er</sup> cas :  $v = 0$ . La masse  $m$  est alignée avec  $m_1$  et  $m_2$ . On a  $\rho_1 = |u + \mu|$ ,  $\rho_2 = |u - 1 + \mu|$ . Il faut chercher les extremums de la fonction  $g(u)$  donnée par

$$g(u) = -\frac{1}{2}u^2 - \frac{1 - \mu}{|u + \mu|} - \frac{\mu}{|u - 1 + \mu|}. \quad (5.55)$$

Or,

$$g''(u) = -1 - \frac{2(1 - \mu)}{|u + \mu|^3} - \frac{2\mu}{|u - 1 + \mu|^3} < 0 \quad \forall u \quad (5.56)$$

et  $g(u) \rightarrow -\infty$  pour  $u \rightarrow \pm\infty$ ,  $u \rightarrow -\mu$ ,  $u \rightarrow 1 - \mu$ .

$\Rightarrow$  3 extremums, un pour  $u < -\mu$ , un pour  $-\mu < u < 1 - \mu$  et un pour  $\mu > 1 - \mu$ .

2<sup>ème</sup> cas :  $v \neq 0$ . Alors,  $f = 0$ . La deuxième équation impose  $\rho_1 = \rho_2$ . Posons  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ . L'équation  $f = 0$  donne

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1 - \mu}{\rho^3} - \frac{\mu}{\rho^3} &= 0 \\ \Rightarrow \rho^3 &= 1 \quad \Rightarrow \rho = 1. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Les 3 astres forment un triangle équilatéral  $\Rightarrow$  2 points d'équilibre.

En linéarisant l'hamiltonien autour de ces points, on peut démontrer qu'ils sont stables si  $27\mu(1 - \mu) < 1$ .

Dans le cas du système Soleil-Jupiter,

$$\mu = \frac{m_J}{m_S + m_J} = 0.000954.$$

Cette condition est largement remplie.

## 5.6 Chaos dans les systèmes hamiltoniens

Lorsqu'un système est intégrable, le mouvement a lieu sur une variété de dimension  $n$  qui a la topologie d'un tore. Cela impose au mouvement une certaine régularité : le mouvement est multipériodique en terme des variables angles.

Pour les systèmes non intégrables – l'immense majorité ! – on ne peut pas caractériser le mouvement à l'aide de variables constantes ou périodiques. Pour se faire une idée de la régularité – ou de l'absence de régularité – du mouvement, il est commode de tracer ce qu'on appelle une *section de Poincaré*. Cette notion est particulièrement utile pour des systèmes à 2 degrés de liberté. Considérons un système autonome décrit par le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(x, y), \quad (5.58)$$

et considérons l'hyperplan défini par  $y = 0$ . Si l'on considère une orbite donnée et qu'on la suit au cours du temps, l'ensemble des points  $(x, p_x)$  obtenus chaque fois que  $y = 0$  constitue ce qu'on appelle une *section de Poincaré*. Ce terme de section vient de l'étude de systèmes intégrables. Dans ce cas le mouvement a lieu sur un tore, et la section de Poincaré correspond à l'intersection de ce tore avec l'hyperplan  $y = 0$ . Si les fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont incommensurables, la section sera progressivement remplie en suivant une seule orbite car le mouvement n'est pas périodique. Par contre, si elles sont commensurables, le mouvement est périodique, et on ne trouve qu'un nombre fini de points en suivant une orbite donnée.

Dans le cas de systèmes non intégrables, l'expérience prouve que deux situations sont possibles :

- la section correspondant à une orbite reste une courbe bien définie dans le plan  $(x, p_x)$ . On parle de *mouvement régulier*.
- la section correspondant à une orbite correspond à un ensemble de points répartis de façon erratique dans le plan  $(x, p_x)$ . On parle de *mouvement chaotique*.

Pour une énergie donnée, on peut se trouver dans l'un des trois cas suivants :

- Toutes les orbites sont régulières.
- Il y a coexistence d'orbites régulières et d'orbites chaotiques.
- Toutes les orbites sont chaotiques.

Un exemple classique est celui du modèle de Hénon-Heiles défini par le hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3.$$

Les courbes d'énergie potentielle constante ont la forme suivante :

- $E = 0 \Rightarrow x = y = 0$
- $E$  petit  $\Rightarrow x^2 + y^2 = 2E \Rightarrow$  cercles de rayon  $\sqrt{2E}$
- $E = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3 &= \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow x^2 \left( \frac{1}{2} + y \right) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 &= \left( \frac{1}{2} + y \right) \left( \frac{1}{3} + \alpha y + \frac{1}{3}y^2 \right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{\alpha}{2}y + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{3}y + \alpha y^2 + \frac{1}{3}y^3 \end{aligned}$$

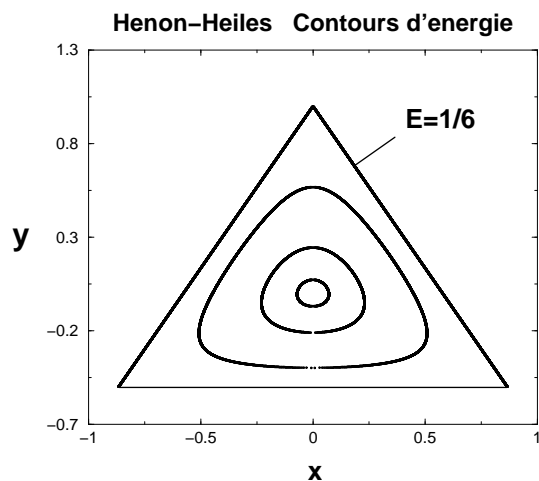
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3} & \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} + \alpha = -\frac{1}{2} & \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc, pour  $E = \frac{1}{6}$ , on a :

$$\begin{aligned} x^2 \left( \frac{1}{2} + y \right) &= \left( \frac{1}{2} + y \right) \frac{1}{3} (1 - y)^2 \\ \Rightarrow &\begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{1-y}{\sqrt{3}} \\ \text{ou} \\ x = \frac{y-1}{\sqrt{3}} \end{cases} \end{aligned}$$

Cette courbe définit un triangle équilatéral entre les points

$$A = (0, 1), \quad B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$



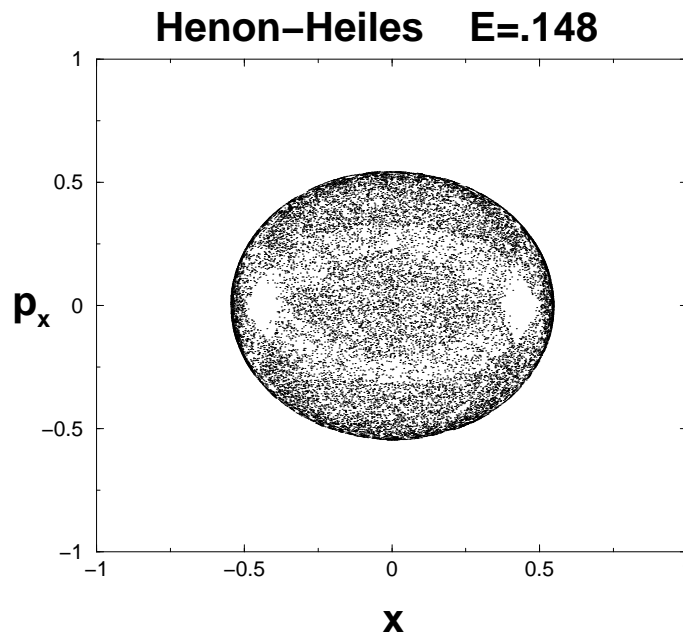
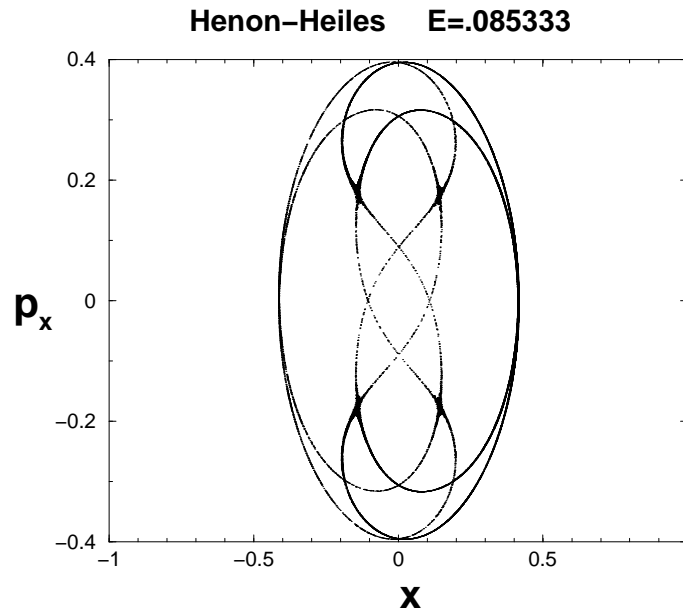
Si on étudie les sections de Poincaré correspondant à des orbites formées d'énergie  $E \leq \frac{1}{6}$ , on s'aperçoit que le comportement dépend fortement de l'énergie.

- $E \leq \frac{1}{12} \simeq 0.083$  : pratiquement toutes les orbites conduisent à des sections bien définies
- $E = \frac{1}{6} \simeq 0.167$  : pratiquement toutes les orbites sont chaotiques

La persistance de sections bien définies pour des systèmes non intégrables a été prouvée dans certains cas par Kolmogorov, Arnold et Moser, qui ont donné leur nom à un théorème dit *théorème KAM* : si on perturbe un système intégrable par un terme  $\epsilon H_1(q, p)$  qui le rend non intégrable, les tores invariants pour lesquels les fréquences sont suffisamment incommensurables persistent pour  $\epsilon$  suffisamment petit.

### Equations de Hamilton pour Hénon-Heiles

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x - 2yx \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -y - x^2 + y^2 \\ \dot{x} = p_x \\ \dot{y} = p_y \end{cases}$$



Dans le cas de Hénon-Heiles, pour  $E$  petit l'hamiltonien est une petite perturbation par rapport à  $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2)$ , qui est bien sûr intégrable. On s'attend donc à trouver encore des orbites régulières lorsque  $E$  est assez petit.

*Remarque* : Dans le référentiel du centre de masse, et pour des masses égales, l'hamiltonien de Toda peut être réduit à :

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{24} \left( e^{2y+2\sqrt{3}x} + e^{2y-2\sqrt{3}x} + e^{-4y} \right) - \frac{1}{8}. \quad (5.59)$$

Faisons un développement des exponentielles au 3<sup>ème</sup> ordre. Il vient

$$e^{2y+2\sqrt{3}x} = 1 + 2y + 2\sqrt{3}x + \frac{1}{2}(4y^2 + 8\sqrt{3}yx + 12x^2) \quad (5.60)$$

$$+ \frac{1}{6} \left( 8y^3 + 3 \cdot 4y^2 \cdot 2\sqrt{3}x + 3 \cdot 2y \cdot 12x^2 + (2\sqrt{3}x)^3 \right) \quad (5.61)$$

$$e^{2y-2\sqrt{3}x} = \text{la même chose, mais les termes en } x \text{ et } x^3 \text{ sont opposés} \quad (5.62)$$

$$e^{-4y} = 1 - 4y + \frac{1}{2} \times 16y^2 - \frac{1}{6} \times 64y^3 \quad (5.63)$$

Alors

$$\begin{aligned} & e^{2y+2\sqrt{3}x} + e^{2y-2\sqrt{3}x} + e^{-4y} \\ &= 3 + 2y^2 + 2y^2 + 8y^2 + 6x^2 + 6x^2 + \frac{8}{6}y^3 + \frac{8}{6}y^3 - \frac{64}{6}y^3 + 12yx^2 + 12yx^2 \\ &= 3 + 12y^2 + 12x^2 - 8y^3 + 24yx^2 \end{aligned} \quad (5.64)$$

Au troisième ordre, on trouve donc

$$H = \frac{1}{2} \left( p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2 \right) + x^2y - \frac{1}{3}y^3.$$

C'est exactement le modèle de Hénon-Heiles !

Or, le modèle de Toda est intégrable, et le modèle de Hénon-Heiles ne l'est pas. Historiquement, on a d'abord remarqué que les sections de Poincaré étaient toujours régulières pour le modèle de Toda avant de prouver qu'il était intégrable.

## 5.7 “Mesure” du chaos et exposants de Lyapounov

Les sections de Poincaré permettent de mettre en évidence différents comportements, mais elles ne donnent pas une idée précise des conséquences de ces différents comportements. La conséquence la plus frappante de l'apparition du chaos, c'est la forte sensibilité de l'évolution du système à temps long par rapport aux conditions initiales.

Considérons pour commencer un système dynamique à 1 degré de liberté décrit par l'équation d'évolution :

$$\dot{x} = F(x)$$

et supposons que le mouvement reste borné. Pour une condition initiale donnée  $x_0$ , la solution est notée :  $x(t) = \phi_t(x_0)$ . Supposons qu'on parte de  $x_0 + \delta x_0$ , et notons  $y(t) = \phi_t(x_0 + \delta x_0)$  le flot correspondant. L'équation pour  $y(t)$  s'écrit :

$$\frac{dy}{dt} = F(y).$$



Si  $y(t) - x(t) \equiv \delta x(t)$  est petit, ce qui sera le cas si  $\delta x_0$  est suffisamment petit, on peut écrire

$$\frac{dy}{dt} = F(x(t) + \delta x(t)) = \underbrace{F(x(t))}_{=\frac{dx}{dt}} + F'(x(t))\delta x(t) \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\delta x) &= F'(x(t))\delta x(t) \\ \Rightarrow \frac{\dot{\delta x}}{\delta x} &= F'(x(t)) \\ \Rightarrow \ln \left| \frac{\delta x(t)}{\delta x_0} \right| &= \int_0^t F'(x(t))dt \\ \Rightarrow \frac{\delta x(t)}{\delta x_0} &= \exp \int_0^t F'(x(t))dt \end{aligned} \quad (5.66)$$

L'exposant de Lyapounov est défini par

$$\sigma \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t F'(x(t))dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta x(t)}{\delta x_0} \right|. \quad (5.67)$$

Si  $\sigma$  existe, et est différent de 0, pour des temps très longs  $\delta x(t)$  se comporte comme :

$$\delta x(t) \propto \delta x_0 e^{\sigma t}. \quad (5.68)$$

$\sigma < 0$ : point asymptotiquement stable ;  
 $\sigma > 0$ : divergence exponentielle  $\Rightarrow$  chaos.

*Remarque* :  $\sigma$  ne change pas si on fait un changement de variable. Pour le voir, le plus simple est de considérer la version discrétisée du problème :

$$\begin{aligned} \dot{x} = F(x) &\Rightarrow x(t + dt) - x(t) = F(x)dt \\ &\Rightarrow x_{n+1} = \underbrace{x_n + F(x_n)dt}_{f(x_n)}. \end{aligned}$$

Une telle relation de récurrence s'appelle une suite en mathématique, mais dans ce contexte on parle d'*application*.

Pour une telle application, on a :

$$\begin{aligned} x_n &= f^n(x_0) \quad \text{avec } f^n \equiv \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \\ \delta x_n &\equiv f^n(x_0 + \delta x_0) - f^n(x_0) = (f^n)'(x_0)\delta x_0. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f \circ \dots \circ f) &= f' [f^{n-1}(x_0)] \times (f^{n-1})'(x_0) \\ &= f'(x_{n-1})f'(x_{n-2}) \dots f'(x_0) \\ \Rightarrow \frac{\delta x_n}{\delta x_0} &= f'(x_{n-1}) \dots f'(x_0). \end{aligned}$$

Par analogie avec la version continue, on définit l'exposant de Lyapounov par :

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{j=0}^{n-1} f'(x_j) \right| \quad (5.69)$$

$$\text{ou } \sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln |f'(x_j)|. \quad (5.70)$$

Si on effectue un changement de variable  $x_n = g(y_n)$  on a :

$$g(y_n) = f(g(y_{n-1})) \quad (5.71)$$

soit

$$y_n = \underbrace{g^{-1} \circ f \circ g}_{F}(y_{n-1}) \quad (5.72)$$

$$\Rightarrow F^n = g^{-1} \circ f \circ \underbrace{g \circ g^{-1}}_{\text{identité}} \circ f \circ g \circ \dots \circ g^{-1} \circ f \circ g$$

$$= g^{-1} \circ f^n \circ g$$

$$\Rightarrow g \circ F^n = f^n \circ g$$

$$\Rightarrow g'(y_n)(F^n)'(y_0) = (f^n)'(x_0)g'(y_0)$$

$$\Rightarrow F'(y_{n-1}) \dots F'(y_0) = f'(x_{n-1}) \dots f'(x_0) \frac{g'(y_0)}{g'(y_n)}. \quad (5.73)$$

Mais, si le mouvement reste borné, ce qui doit être le cas si on veut définir un exposant de Lyapounov,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{g'(y_0)}{g'(y_n)} \right| = 0$$

$\Rightarrow$  l'exposant de Lyapounov est le même.

### Systemes à plusieurs degrés de liberté

Si on appelle  $A(\vec{x}_p)$  la matrice définie par

$$A(\vec{x}_p)_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_p} \quad (\vec{x}_p = \vec{f}(\vec{x}_{p-1}))$$

on a la généralisation immédiate :

$$\delta \vec{x}_N = (A(\vec{x}_{N-1}) \dots A(\vec{x}_0)) \delta \vec{x}_0.$$

Si on note  $\lambda_1(N), \dots, \lambda_n(N)$  les valeurs propres de la matrice  $A(\vec{x}_{N-1}) \dots A(\vec{x}_0)$ , les exposants de Lyapounov sont définis par :

$$\sigma_i = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln |\lambda_i(N)|. \quad (5.74)$$

C'est le plus grand des exposants qui controle l'évolution pour  $N$  grand.

### Cas particuliers : systèmes hamiltoniens

Pour les systèmes conservatifs, et en particulier pour les systèmes hamiltoniens, la somme des exposants de Lyapounov est nulle. En effet, la condition de conservation du volume s'écrit  $\det A(\vec{x}_i) = 1 \Rightarrow \prod_i \lambda_i = 1$ .

Par ailleurs, si un système est intégrable, tous les exposants de Lyapounov sont nuls. Considérons en effet un système pour lequel on peut résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi. Dans les nouvelles variables, les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} \dot{P}_i = 0 \\ \dot{Q}_i = 0. \end{cases}$$

Tous les exposants de Lyapounov sont ainsi nuls. Les exposants de Lyapounov sont une bonne mesure du chaos. Ils sont nuls pour les systèmes intégrables, et ils le restent pour des petites perturbations tant qu'on reste près d'un système dont les fréquences sont suffisamment incommensurables.

## 5.8 Systèmes dissipatifs : bifurcations et attracteurs étranges

Dans les systèmes dissipatifs, on pourrait penser que la situation générale correspond à un effondrement sur un point fixe stable. La réalité est nettement plus complexe. Deux autres phénomènes, qui sont tous deux des manifestations du chaos, peuvent apparaître :

- bifurcations successives puis apparition de chaos ;
- attracteurs étranges.

### Application logistique et bifurcation

Lorsqu'on change un ou plusieurs paramètres, il peut se produire ce qu'on appelle des *bifurcations* : une orbite régulière se sépare en deux ou en plusieurs orbites. Si ce phénomène se reproduit indéfiniment, il conduit à du chaos.

L'exemple le plus connu est celui de l'*application logistique* :

$$x_{n+1} = 4\lambda x_n(1 - x_n).$$

*Points fixes* :  $x_* = 4\lambda x_*(1 - x_*)$

$$\begin{cases} x_*^{(1)} = 0 \\ 1 - 4\lambda - 4\lambda x_* \Leftrightarrow x_*^{(2)} = 1 - \frac{1}{4\lambda}. \end{cases}$$

*Stabilité* : Dans le cas d'une application, l'équation linéarisée autour d'un point fixe conduit à :

$$x_n - x_* = f'(x_*)(x_{n-1} - x_*) = (f'(x_*)^n)(x_0 - x_*) \quad (5.75)$$

Le point fixe est donc stable si et seulement si  $|f'(x_*)| < 1$ , soit  $-1 < f'(x_*) < 1$ .

Pour l'application logistique,  $f'(x) = -8\lambda x + 4\lambda$

$$\begin{aligned} f'(x_*^{(1)}) &= 4\lambda \Rightarrow x_*^{(1)} \text{ stable si } |4\lambda| < 1 \Rightarrow \lambda < \frac{1}{4} \\ f'(x_*^{(2)}) &= -8\lambda + 2 + 4\lambda = -4\lambda + 2 \\ x_*^{(2)} \text{ stable si} & \quad -4\lambda + 2 > -1 \Rightarrow \lambda < \frac{3}{4} \\ \text{et si} & \quad -4\lambda + 2 < 1 \Rightarrow \lambda > \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

*Résumons* :

$$\begin{aligned} \lambda < \frac{1}{4} &\Rightarrow x_* = 0 \quad \text{stable} \\ \frac{1}{4} < \lambda < \frac{3}{4} &\Rightarrow x_* = 1 - \frac{1}{4\lambda} \quad \text{stable} \end{aligned}$$

Que se passe-t-il lorsque  $\lambda > 3/4$  ?

Dans un premier temps, ce point fixe donne lieu, par une bifurcation, à un cycle d'ordre 2, qui donne lui-même naissance à un cycle d'ordre 4, et ainsi de suite.

Un *cycle d'ordre*  $n$  est un ensemble de points fixes de  $f^{(n)} = f \circ \dots \circ f$  tels que  $x_2 = f(x_1)$ ,  $x_3 = f(x_2)$ ,  $\dots$ ,  $x_1 = f(x_n)$ . Le nombre de cycles devient infini quand  $\lambda$  atteint la valeur  $\lambda_\infty = 0.89\dots$ . Au delà, le système devient chaotique.

L'exposant de Lyapounov  $\sigma$  est négatif pour  $\lambda < \lambda_\infty$ , et il est positif au-delà, sauf pour quelques fenêtres ou de nouveaux cycles apparaissent. En particulier, on peut démontrer que quand  $\lambda = 1$ ,  $\sigma = \ln 2$ .

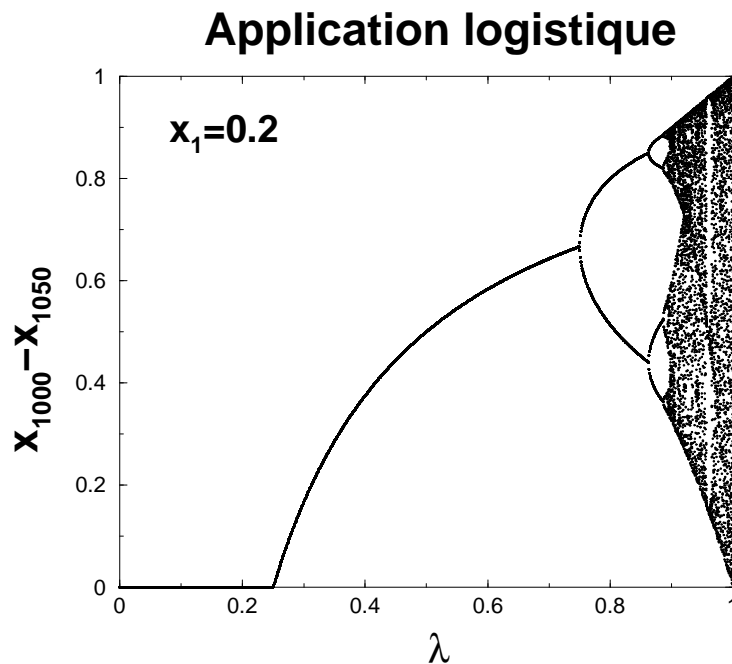
*Démonstration* : Faisons le changement de variable  $x = \frac{1}{2}(y + 1)$  :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= 2x_{n+1} - 1 \\ x_{n+1} &= 4x_n(1 - x_n) = (y_n + 1)(1 - y_n) = 1 - y_n^2 \\ \Rightarrow y_{n+1} &= 1 - 2y_n^2. \end{aligned}$$

Faisons de plus le changement de variable  $y = \sin \theta$ .

$$\begin{aligned} \sin \theta_{n+1} &= 1 - 2 \sin^2 \theta_n = \cos(2\theta_n) \\ \Rightarrow \theta_{n+1} &= -2\theta_n + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Comme c'est une transformation linéaire, on en déduit immédiatement que  $\sigma = \ln 2$ .



### Attracteurs étranges

Dans l'exemple précédent, les attracteurs sont constitués d'un nombre fini de points qui sont atteints successivement au cours de l'itération. Mais il existe des systèmes qui possèdent des attracteurs plus compliqués. En particulier, il existe des systèmes pour lesquels l'attracteur consiste en un nombre infini de points qui constitue un ensemble de dimension fractale (non entière). On parle d'*attracteur étrange*.

*Exemple* : application de Hénon

$$\begin{cases} x_{i+1} = y_i - ax_i^2 + 1 \\ y_{i+1} = bx_i. \end{cases}$$

La figure correspond aux paramètres  $a=1.4$  et  $b=0.3$ .

Les théories actuelles de la turbulence sont basées sur ces deux idées :

- suite infinie de bifurcations  $\Rightarrow$  apparition du chaos ;
- attracteur étrange.

Pour plus de détails, voir cours de 4<sup>ème</sup> année "Physique non linéaire et chaos".

