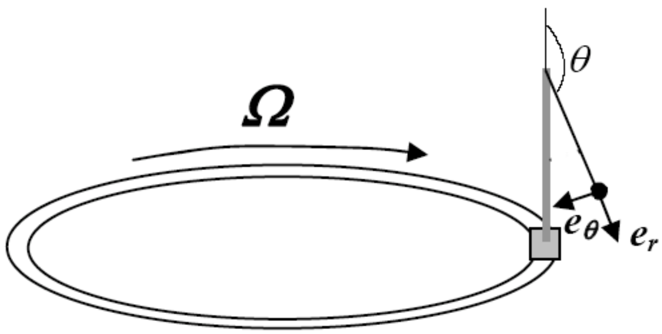
Exercices

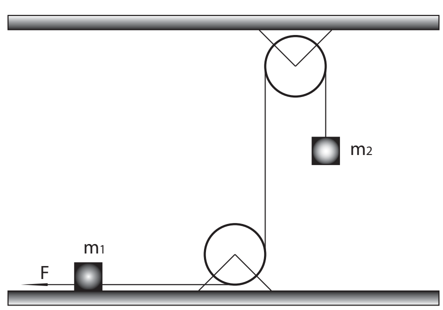
Exercice 1
Un pendule constitué d'une tige de longueur r sans masse et d'une masse m se trouve dans un train en rotation avec une vitesse angulaire Ω. Le pendule est libre d'osciller dans un plan perpendiculaire à la trajectoire.



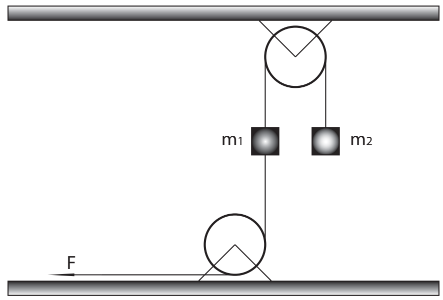
1. En vous plaçant dans le référentiel en mouvement rattaché au train, exprimez l'accélération et la vitesse du pendule (utilisez les coordonnées sphériques comme indiqué sur le schéma).
2. Donner l'accélération dans le référentiel terrestre.
3. Trouver l'équation qui permet de déterminer l'angle d'inclinaison du pendule lorsqu'il n'y a pas d'oscillations. (On ne cherchera pas à résoudre l'équation)

Exercice 2
On considère les montages 1. et 2. suivants. On commence sans vitesse initiale et on le laisse évoluer, tout en maintenant F constant. Dans les deux cas, on néglige les frottements.

1.



2.

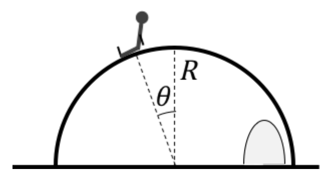


Calculer l'accélération de chacun des corps en fonction de m_1,m_2, et F.

Exercice 3
Un bloc de masse $m = 50$ kg glisse le long d'un plan incliné de 30°. Il part sans vitesse initiale. Son accélération est de 2 m·s^{-2} et le plan est long de 10 m.

1. Quelle est son énergie cinétique à l'arrivée en bas du plan ?
2. Quelle est la valeur des forces de frottements ?
3. Quelle est le travail des forces de frottements ?
4. Quelle est la valeur du coefficient de friction cinétique ?

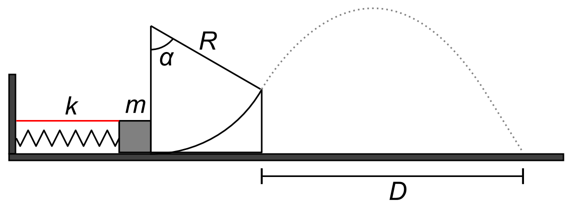
Exercice 4 Un esquimau fait des glissades sur le toit de son igloo. L'igloo est représenté comme une demi-sphère de rayon R posée sur un sol d. La position de l'esquimau sur l'igloo est repérée par son angle θ définit comme sur le schéma ci-contre. L'esquimau glisse sans frottement sur la glace du toit. Vous noterez m la masse de l'esquimau, représenté comme un point matériel, et g l'accélération de la pesanteur.



L'esquimau se laisse glisser depuis le sommet de l'igloo (sa vitesse initiale est négligeable).

a) L'esquimau décolle du toit lorsque $\theta = \theta_d$. Trouvez l'expression de θ_d.
b) Exprimez les composantes horizontales et verticales de sa vitesse lorsqu'il décolle.
c) Quel type de mouvement a l'esquimau après avoir décollé du toit ?
d) Quelle est la norme de sa vitesse quand il atterrit ?

Exercice 5 On considère le montage suivant :



Une masse est reliée à un support par un ressort de raideur k comprimé de x. Une corde maintient le ressort comprimé. La piste sans frottement est un arc de cercle de rayon R. A t=0 on brûle la corde, le ressort se détend et pousse la masse. Donner les réponses en fonction de g, k, m, α, x et R.

1. Quelle doit être la valeur minimale de k pour que la masse quitte la piste ?

k_{min} = ...

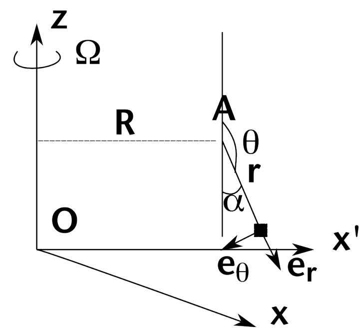
2. A quelle distance D de son point de décollage la masse arrive-t-elle ?

D = ...

Solutions

Solution 1

1. Soient $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y})$ le référentiel terrestre et $\mathcal{R}'(A, \vec{x}', \vec{y}')$ le référentiel lié au train. On prend l'origine A au point d'attache du pendule.
   Dans $\mathcal{R}'$, on travaille en coordonnées sphériques.



   Les contraintes sur le système sont : $\varphi = \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ et $\dot{r} = \ddot{r} = 0$.
   La vitesse est donnée par $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.
   L'accélération est $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.

2. L'accélération est donnée dans le référentiel $\mathcal{R}$ par :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

   A décrit un mouvement circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$. Alors :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) = -R\Omega^2\vec{e}_x'$$

   Une considération géométrique du système nous donne :

$$\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z \text{ ,avec } \Omega = const. < 0$$
$$\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$$
$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}) = \Omega^2 r\vec{e}_z \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r) = \Omega^2 r\vec{e}_z \wedge (\vec{e}_z \wedge (\cos\theta\vec{e}_z + \sin\theta\vec{e}_x')) = -\Omega^2 r\sin\theta\vec{e}_x'$$
$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = 2\vec{\Omega} \wedge r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = 2\Omega r\dot{\theta}\vec{e}_z \wedge (\cos\theta\vec{e}_x' - \sin\theta\vec{e}_z) = 2\Omega r\dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_y'$$

   Donc, finalement :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = -R\Omega^2\vec{e}_x' - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \Omega^2 r\sin\theta\vec{e}_x' + 2\Omega r\dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_y'$$

   avec

$$\vec{e}_x' = \cos\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r$$
$$\vec{e}_y' = \vec{e}_\varphi$$

3. S'il n'y a pas d'oscillations, alors $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Il vient alors

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = -R\Omega^2\vec{e}_x' - \Omega^2 r\sin\theta\vec{e}_x' = -\Omega^2(R + r\sin\theta)(\cos\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r)$$

Les forces sont $\vec{P} = m\vec{g}$ et $\vec{T}$ la tension du fil :

$$\begin{aligned} \vec{T} &= -T\vec{e}_r \\ m\vec{g} &= -mg\cos\theta\vec{e}_r + mg\sin\theta\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Nous utilisons alors la seconde loi de Newton :

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_{\mathcal{R}}(P)$$

ou, plus explicitement :

$$-T\vec{e}_r - mg\cos\theta\vec{e}_r + mg\sin\theta\vec{e}_\theta = -m\Omega^2(R + r\sin\theta)(\cos\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r)$$

Il vient ainsi :

$$\begin{cases} \text{Selon } \vec{e}_r : -T - mg\cos\theta = -m\Omega^2(R + r\sin\theta)\sin\theta & (1) \\ \text{Selon } \vec{e}_\theta : -mg\sin\theta = -m\Omega^2(R + r\sin\theta)\cos\theta & (2) \end{cases}$$

L'équation (1) donne la norme de la tension dans le fil, tandis que (2) donne la valeur de l'angle θ :

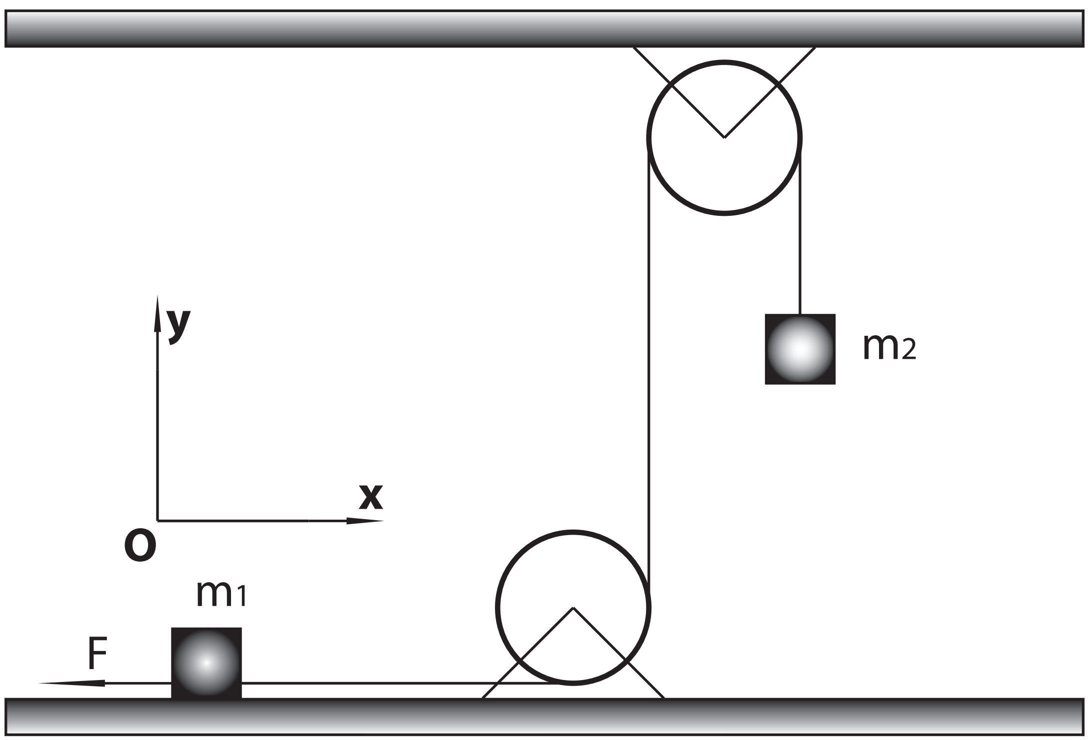
$$-\cancel{m}g\sin\theta = -\cancel{m}\Omega^2(R + r\sin\theta)\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = -\frac{\Omega^2}{g}(R + r\sin\theta)$$

Cette équation étant passablement compliquée à résoudre analytiquement, on préférera une résolution graphique...

Solution 2

Il est important de bien voir que dans tout système de poulie avec une corde rigide, la corde transmet intégralement la tension. En d'autres termes, l'intensité de la force est la même chaque bout de la corde s'il n'y a pas de masse entre ceux-ci.
En revanche, quand une masse entre en jeu, la tension n'est pas forcément la même, car la masse peut être accélérée (et dans ce cas, $\sum \vec{F} \neq \vec{0}$)
On néglige les masses des poulies...

1. Considérons les deux systèmes m_1 et m_2 indépendamment. Le référentiel sera terrestre avec un repère : $(O, \vec{x}, \vec{y})$ (cf schéma).



Sur m_1 : $\sum \vec{F} = m\vec{a}_1 = \vec{F} + \vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1$. La masse m_1 se déplace selon $(O\vec{x})$, et donc : $\begin{pmatrix} m_1 a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui nous donne deux équations :

$$\begin{cases} m_1 a_1 = -F + T & (3) \\ 0 = -m_1 g + R & (4) \end{cases}$$

Sur m_2, $\sum \vec{F} = m\vec{a}_2 = \vec{P} + \vec{T}_2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ m_2 a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$. On obtient donc une troisième équation :

$$m_2 a_2 = -m_2 g + T \tag{5}$$

On cherche a_1 et a_2. La corde n'est pas élastique, donc quand m_2 monte avec a_2, m_1 part vers la gauche avec a_1 :

$$a_2 = -a_1 \tag{6}$$

(3), (5) et (6) sont trois équations à trois inconnues : a_1, a_2 et T :

$$\begin{cases} m_1 a_1 = -F + T & (3) \\ m_2 a_2 = -m_2 g + T & (5) \\ \quad a_2 = -a_1 & (6) \end{cases}$$

En effectuant (5)-(3), on obtient : $m_2 a_2 - m_1 a_1 = -m_2 g + F$. En utilisant (6), nous obtenons alors : $m_2 a_2 + m_1 a_2 = -m_2 g + F$, c'est à dire $a_2(m_1 + m_2) = F - m_2 g$, ou encore $a_2 = \frac{F - m_2 g}{m_1 + m_2}$. Finalement :

$$\boxed{a_1 = -a_2 = \frac{m_2 g - F}{m_1 + m_2}}$$

2. Sur (m_1), $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ implique : $m_1 \vec{a}_1 = \vec{T}_3 + m_1 \vec{g} + \vec{T}$ avec T_3 le force de tension de la corde en bas de la masse. On a $|\vec{T}_3| = F$ soit, explicitement :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ m_1 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$$

qui nous donne une première équation :

$$m_1 a_1 = -F - m_1 g + T \tag{7}$$

Sur (m_2), $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ donne : $m_2 \vec{a}_2 = \vec{T} + m_2 \vec{g}$, c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ m_2 a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \end{pmatrix}$$

pour une deuxième équation :

$$m_2 a_2 = T - m_2 g \tag{8}$$

Quand m_1 monte, m_2 descend, donc

$$a_2 = -a_1 \tag{9}$$

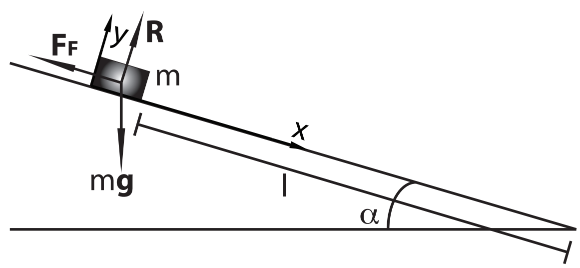
Le système d'équations à résoudre est donc :

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - F - m_1 g & (7) \\ m_2 a_2 = T - m_2 g & (8) \\ \quad a_2 = -a_1 & (9) \end{cases}$$

(8)-(7) donne : $m_2 a_2 - m_1 a_1 = F + m_1 g - m_2 g$. Avec (9), on a alors $m_1 a_2 + m_2 a_2 = F + (m_1 - m_2)g$, et donc finalement :

$$\boxed{a_2 = \frac{F + (m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} = -a_1}$$

Solution 3



1.

$$a = \text{cte} \qquad v = v_0 + at = at \qquad x = x_0 + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$$

Le bloc arrive en bas du plan après un parcours de $l = 10$ m au temps t_1.

$$l = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a}}$$

Son énergie cinétique vaut alors :

$$E_{c,1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(at_1)^2 = mla = 1000 \text{ J}$$

2. Les forces de frottements peut se calculer en utilisant la RFD :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_F$$

$$m\vec{a} = \begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_F = \begin{pmatrix} -F_F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_F = -ma + mg\sin\alpha = 145 \text{ N}$$

3. Le travail des forces de frottements est donnée par

$$W_F = \int_{trajet} \vec{F}_F . \vec{dl} = -F_F \cdot l$$

On en tire donc

$$W_F = mla - mgl \sin\alpha = -1450 \text{ J}$$

Le travail des forces de frottements est, comme il se doit, négatif.

4. La projection des forces sur un axe perpendiculaire au plan, et le fait que le mouvement se déroule sur ce plan donnent :

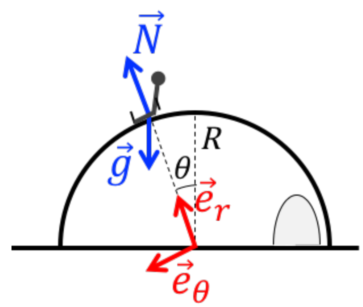
$$F_F = \mu_c \cdot R = \mu_c mg \cos\alpha$$

et donc le coefficient de frottement :

$$\mu_c = \frac{F_F}{mg\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{a}{g\cos\alpha} = 0.34$$

Solution 4

a) L'esquimau est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la force de réaction du toit $\vec{N}$ Il n'y a pas de composante tangentielle à la force de réaction du toit car il n'y a pas de force de de frottement.
$\vec{N}$ est colinéaire au vecteur radial $\vec{e}_r$, $\vec{N} = N\vec{e}_r$. La condition pour que l'esquimau décolle est $N = 0$. Il nous faut calculer N.



La seconde loi de Newton projetée selon $\vec{e}_r$ est :

$$ma_c = N - mg\ \cos\theta$$

a_c étant l'accélération centripète. Pour un mouvement circulaire, a_c est donné par (en projection sur $\vec{e}_r$) :

$$a_c = -\frac{v^2}{R} = -R\dot{\theta}^2$$

(On peut le retrouver à partir du formulaire)
La seconde loi de Newton projetée selon $\vec{e}_r$ s'écrit donc :

$$-mR\dot{\theta}^2 = N - mg\ \cos\theta \Rightarrow N = mg\ \cos\theta - mR\dot{\theta}^2$$

Utilisons la conservation énergie mécanique pour expliciter le terme $mR\dot{\theta}^2$:

$$mgR = mgR\,\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 = mgR\,\cos\theta + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$
$$\Rightarrow mR\dot{\theta}^2 = 2mg(1-\cos\theta)$$

Au final, N s'exprime donc :

$$N = mg\,\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\,\cos\theta - 2)$$

La condition pour que l'esquimau décolle est $N = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$

$$\theta_d = \arccos\frac{2}{3}$$

b) La norme de la vitesse lorsqu'il décolle est donnée par la conservation de l'énergie mécanique :

$$mgR = mgR\cos\theta_d + \frac{1}{2}m{v_d}^2 \Rightarrow {v_d}^2 = 2Rg(1-\cos\theta_d) = 2Rg(1-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}Rg \Rightarrow ||v_d|| = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}$$

Ses composantes horizontales v_{dx} et verticales v_{dy} sont :

$$v_{dx} = \cos\theta_d||v_d|| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2Rg}{3}}$$
$$v_{dy} = \sin\theta_d||v_d|| = \sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}\sqrt{\frac{2Rg}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2Rg}{3}}$$

c) L'esquimau n'est plus soumis qu'à son poids après avoir décollé. Son mouvement est uniformément accéléré ($\vec{a} = \vec{g}$) et sa trajectoire est parabolique.

d) Tout le mouvement se faisant sans frottement (glissade et trajet parabolique), on peut directement poser la conservation de l'énergie mécanique entre le haut de l'igloo et le point de chute :

$$mgR = \frac{1}{2}m{v_a}^2 \Rightarrow ||v_a|| = \sqrt{2Rg}$$

Solution 5

1. (2 pts) En considérant la conservation de l'énergie, l'énergie potentielle élastique initiale $E_k = \frac{1}{2}kx^2$ est transformée au point de décollage en énergie cinétique $Ec = \frac{1}{2}v_0^2$ et en énergie potentielle de pesanteur $E_p = mgR(1-\cos\alpha)$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR(1-\cos\alpha)$$

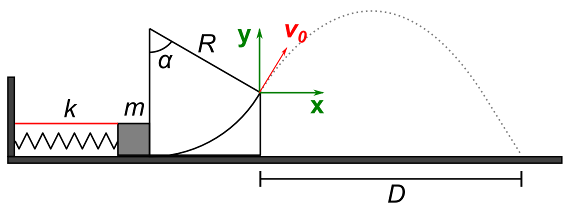
Pour que la masse quitte la piste il faut la vitesse de décollage v_0 soit non nulle, autrement dit il faut $E_k \geq E_p$:

$$\frac{1}{2}kx^2 \geq mgR(1-\cos\alpha)$$

soit

$$\boxed{k_{lim} = \frac{2mgR(1-\cos\alpha)}{x^2}}$$

2. (3 pts) Une fois que la masse a décollé, le problème devient balistique. L'angle de décollage est évidemment α.



Il vient alors :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0\cos\alpha \\ v_0\sin\alpha - gt \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} v_0\cos\alpha\, t \\ v_0\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

La masse arrive au point d'atterrissage $B = \begin{pmatrix} D \\ -h \end{pmatrix}$ au temps t_f. Nous avons donc deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} D = v_0\cos\alpha\, t_f \\ -R(1-\cos\alpha) = v_0\sin\alpha\, t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 \end{cases}$$

Puisque nous cherchons D, nous allons éliminer t_f. Sur Oy, nous avons l'équation du second ordre

$$v_0\sin\alpha\, t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 + R(1-\cos\alpha) = 0$$

que l'on résout avec le discriminant :

$$\Delta = (v_0\sin\alpha)^2 + 2gR(1-\cos\alpha)$$
$$t_f = \frac{-v_0\sin\alpha \pm \sqrt{\Delta}}{-g}$$

La solution positive pour t_f est donc :

$$t_f = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gR(1-\cos\alpha)}}{g}$$

soit

$$t_f = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gR(1-\cos\alpha)}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right]$$

et ainsi :

$$D = v_0 \cos\alpha\, t_f = \frac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gR(1-\cos\alpha)}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right]$$

La vitesse v_0 se calcule à partir de la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR(1-\cos\alpha) \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{kx^2}{m} - 2gR(1-\cos\alpha)}$$

et donc, au final :

$$\boxed{D = \frac{\left(\frac{kx^2}{m} - 2gR(1-\cos\alpha)\right)\cos\alpha\sin\alpha}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gR(1-\cos\alpha)}{\left(\frac{kx^2}{m} - 2gR(1-\cos\alpha)\right)\sin^2\alpha}}\right]}$$