23 septembre 2024

Série 1 : Vecteurs - Cinématique

1. Vecteurs

Soit $(O, \hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \hat{\epsilon}_3)$ un repère orthonormé direct, soit les deux points $A = (7, 4, 1)$ et $B = (-2, 5, 3)$. On demande :

1. la norme des vecteurs $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$, $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$
2. les angles AOB et OAB
3. la projection orthogonale de $\boldsymbol{AB}$ sur $\boldsymbol{OA}$
4. l'aire du triangle OAB
5. les coordonnées du point D défini par $\boldsymbol{OD} = \boldsymbol{OA} \wedge \boldsymbol{AB}$

2. Points coplanaires

Vérifier que les quatres points de coordonnées cartésiennes $A = (4, 5, 1)$, $B = (3, 0, 1)$, $C = (3, 9, 4)$ et $D = (1, -1, 4)$ sont coplanaires.

3. Produit triple

Vérifier l'identité du produit triple

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$$

à l'aide de l'exemple numérique

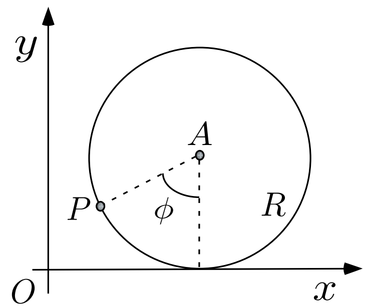
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Repère qui change d'orientation au cours du temps

1. Soit un repère droit (trièdre) mobile $(O, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$. Quelles sont les six conditions sur $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}$, $\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}$ et $\dot{\hat{\boldsymbol{z}}}$ pour que le repère demeure un repère droit au cours du temps ? (Indication : utiliser le produit scalaire et la règle de Leibniz appliquée à celui-ci.)
2. Montrer que les six conditions du point 1. sont satisfaites s'il existe un vecteur $\boldsymbol{\omega}$ tel que $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{x}}$, $\dot{\hat{\boldsymbol{y}}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{y}}$, $\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{z}}$. (Indication : utiliser le produit mixte et les propriétés du déterminant.)

5. Point sur roue

Soit une roue de rayon R, d'axe A, sur une surface horizontale. Soit P un point de sa circonférence.



a) Donner la position des points A, puis P en coordonnées cartésiennes en fonction du paramètre ϕ. On prendra l'origine du repère au point où P est en contact avec le sol.

b) Justifier que P perd le contact avec le sol selon un mouvement vertical. On pourra s'aider de l'approximation des petits angles.

c) Tracer la trajectoire de P en vous aidant de quelques points caractéristiques.

6. Bielle et Piston

Soit une bielle connectée à une roue de rayon R. La bielle est de longueur L. De l'autre côté de la bielle se situe un piston qui est entraîné par la bielle. On désigne par A le point de liaison (joint de rotation) entre la bielle et la roue et par B le point de liaison et le piston (joint de rotation).

1. On demande de trouver la relation mathématique entre l'angle de la roue θ et la position du point C situé sur la bielle à une distance d du point A.
2. Déterminer la vitesse du point C.

Application numérique : $d = 0.1, L = 5.8, R = 1$.

(NB : utiliser les vecteurs et la trigonométrie, puis les règles des dérivées)