1. Soient un espace hilbertien $(H, < \cdot, \cdot >)$ de dimension infinie et un opérateur linéaire $A \in \mathcal{L}(H)$ symétrique, compact et tel que le sous-espace $(N(A), < \cdot, \cdot >)$ soit séparable. Prouver que $\lambda \neq 0$ est dans $\sigma(A)$ ssi λ est une valeur propre de A. Montrer aussi que $0 \in \sigma(A)$.

2. Soient un espace hilbertien $(H, < \cdot, \cdot >)$ de dimension infinie et un opérateur linéaire $A \in \mathcal{L}(H)$ symétrique, compact et tel que le sous-espace $(N(A), < \cdot, \cdot >)$ soit séparable. Soient encore une suite orthonormée totale $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H consistant en vecteurs propres de A et la suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des valeurs propres correspondantes.

   Pour $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit $f(A) : H \to H$ par

   $$\forall x \in H \quad f(A)x = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(\lambda_n) < x, u_n > u_n$$

   (a) Expliquer la signification de la somme et montrer que $f(A) \in \mathcal{L}(H)$, $||f(A)|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(\lambda_n)|$ et $f(A)$ est symétrique.

   (b) Prouver que $\{f(\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des valeurs propres de $f(A)$.

   (c) Prouver que $f(A)$ est compact ssi $f(0) = 0$.

3. Soit une limite de Banach $F : l^\infty_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prouver qu'il n'y a aucun $\alpha \in l^1_\mathbb{R}$ tel que

   $$\forall \xi \in l^\infty_\mathbb{R} \quad F(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n$$