EPFL - automne 2024
ANALYSE FONCTIONNELLE I **Exercices**
Série 7 31 octobre 2024

1. Soient un espace préhilbertien $(X, < \cdot, \cdot >)$ et $A \in \mathcal{L}(X)$ symétrique et compact. Prouver que
$$||A|| = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ est une valeur propre de } A\}$$
et que $||A^n|| = ||A||^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit l'opérateur linéaire $T : l^2 \to l^2$ défini par $T\xi = \eta$ si $\eta_k = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_{k,l}\xi_l$, où les $\lambda_{k,l} \in \mathbb{F}$ satisfont $\sum_{k,l=1}^{\infty} |\lambda_{k,l}|^2 < \infty$ et $\lambda_{k,l} = \overline{\lambda_{l,k}}$ pour tous $k, l \in \mathbb{N}$. Prouver que T est symétrique et qu'il a au plus une quantité dénombrable de valeurs propres non nulles (en tenant compte de leurs multiplicités, c'est-à-dire des dimensions des espaces propres correspondants).

3. Soit une suite orthonormée $\{e_n\}_{n\geq 1}$ dans un espace préhilbertien $(X, < \cdot, \cdot >)$ sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telle que
$$\forall x \in X \quad x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \ . \tag{1}$$
Montrer que $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est une base de Schauder.

   Remarque: une suite orthonormée $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est dite *totale* si $X = \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Il résulte du §IV.9 du cours que $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est totale ssi elle vérifie (1).

4. Soit une suite orthonormée $\{e_n\}_{n\geq 1}$ dans un espace préhilbertien $(X, < \cdot, \cdot >)$.
   (a) Pour tout $x \in X$, montrer que $\{\sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy.
   (b) Montrer que si $\{e_n\}$ est une suite orthonormée vérifiant (1) ci-dessus, alors
$$\{x \in X : \ < x, e_n >= 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\} = \{0\}. \tag{2}$$
   (c) Si X est un espace hilbertien et (2) est satisfaite, montrer que $\{e_n\}$ est une suite orthonormée vérifiant (1).

5. Soit un espace préhilbertien $(X, < \cdot, \cdot >)$ séparable et de dimension infinie. Montrer qu'il admet une suite orthonormée totale.

   Indication: appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à un ensemble dense et dénombrable.

6. Considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, muni de la structure usuelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour $s \in \mathbb{R}$, soit la fonction $e_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$e_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = s, \\ 0 & \text{si } t \neq s. \end{cases}$$
Soit encore le sous-espace vectoriel $X = \text{span}\{e_s : \ s \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{F}$, c'est-à-dire, $f \in X$ ssi $\{t \in \mathbb{R} : f(t) \neq 0\}$ est un ensemble fini (qui peut dépendre de f). On définit ensuite $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{R}$ par
$$< f, g >= \sum_{\{t\in\mathbb{R}: \ f(t)g(t)\neq 0\}} f(t)g(t),$$

où l'ensemble des t qui interviennent dans la somme est fini, et où on convient qu'une somme sur un ensemble vide donne 0.
En admettant que $(X, < \cdot, \cdot >)$ est un espace préhilbertien, prouver qu'il n'est pas séparable.

7. (a) Si une suite $(\alpha_k) \subset \mathbb{F}$ est telle que la limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k$ existe dans $\mathbb{F}$ pour tout $(\xi_k) \in l^\infty$, montrer que $(\alpha_k) \in l^1$.
   (b) Si une suite $(\alpha_k) \subset \mathbb{F}$ est telle que la limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k$ existe dans $\mathbb{F}$ pour tout $(\xi_k) \in l^1$, montrer que $(\alpha_k) \in l^\infty$.