1. Soit un evn X sur $\mathbb{F}$, un opérateur linéaire compact $T : X \to X$, $\lambda \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$ et $T_\lambda := T - \lambda I$, où $I : X \to X$ est l'opérateur identité. Prouver que

$$X = R(T_\lambda^0) \supset R(T_\lambda) \supset R(T_\lambda^2) \supset \ldots \supset R(T_\lambda^n) \supset R(T_\lambda^{n+1}) \supset \ldots$$

et que tous ces sous-espaces vectoriels sont fermés.

2. Soit les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus.

Si $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ et $R(T_\lambda^n) = R(T_\lambda^{n+1})$, prouver que $R(T_\lambda^{n+1}) = R(T_\lambda^{n+2})$.

De plus prouver qu'il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $R(T_\lambda^n) = R(T_\lambda^{n+1})$.

3. A l'exercice 1 de la série 3, nous avons vu que la suite $\{e_n\}_{n\geq 1} \subset l^1$ définie par $e_n = (\delta_{n,k})_{k\geq 1}$ est une base de Schauder de l^1. Posons

$$h_1 = e_1, \quad h_n = e_n - e_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

(a) Si une suite $\xi = (\xi_n) \in l^1$ s'écrit sous la forme $\xi = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k$ dans l^1 pour une certaine suite $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{F}$, prouver que $\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n - \alpha_{n+1}| < \infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \sum_{k=n}^\infty \xi_k$ (avec convergence absolue car $\xi \in l^1$).

(b) Prouver que $\{h_n\}_{n\geq 1}$ est une base de Schauder de l^1.

(c) Montrer que $\Big(n^{-1} - (n+1)^{-1}\Big)_{n\geq 1} \in l^1$ s'écrit dans la base de Schauder $\{h_n\}$ sous la forme $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k$ dans l^1, où $\alpha_k = 1/k$ pour tout $k \geq 1$.
Vérifier néanmoins que, pour ce cas particulier, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{2k} h_{2k}$ n'existe pas dans l^1.