EPFL - automne 2024
ANALYSE FONCTIONNELLE I **Exercices**
Série 4 3 octobre 2024

1. Soit l'opérateur linéaire $T : l^2 \to l^2$ défini par $T\xi = \eta$ si $\eta_k = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_{k,l}\xi_l$, où les $\lambda_{k,l} \in \mathbb{F}$ satisfont $\sum_{k,l=1}^{\infty} |\lambda_{k,l}|^2 < \infty$. Prouver que T est borné et donner une borne supérieure pour sa norme.

2. Soit un espace de Banach $(X, ||\cdot||)$. Pour $T \in \mathcal{L}(X)$, posons $S_n(T) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}T^k$, où $T^0 = I$ et T^k est l'opérateur T composé k fois avec lui-même lorsque $k \geq 1$. Prouver que

   (a) la suite $\{S_n(T)\}_{n\geq 0}$ est convergente dans $\mathcal{L}(X)$; sa limite est notée $\exp(T)$;

   Indication: pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, poser $\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}t^k$ et utiliser $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(||T||) = e^{||T||}$

   (b) $\exp(0) = I$ et $\exp(L+T) = \exp(L)\circ\exp(T)$ pour tous $L, T \in \mathcal{L}(X)$ tels que $L \circ T = T \circ L$.

   Indication: $S_n(L) \circ S_n(T) - S_n(L+T) = \displaystyle\sum_{0\leq k,l\leq n,\ k+l\geq n+1} \frac{1}{k!l!} L^k \circ T^l$

3. Donner un exemple d'un evn $(X, ||\cdot||)$ tel que l'opérateur identité $I \in \mathcal{L}(X)$ n'est pas compact.

4. Soient des evn X, Y et Z.

   (a) Prouver que l'ensemble de tous les opérateurs compacts $T : X \to Y$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$.

   (b) Pour $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$, montrer que $T \circ S$ est compact si S ou T l'est.

5. Soient des evn X et Y, et soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Prouver que T est compact si $\dim R(T) < \infty$.

   Rappel: dans $\mathbb{F}^n$, toutes les normes sont équivalentes (voir l'exercice 2 de la série 3).

6. Soit les opérateurs linéaires $S, T, P : l^\infty_{\mathbb{F}} \to l^\infty_{\mathbb{F}}$ définis par

$$Sx = (x_2, x_3, x_4, \ldots), \quad Tx = (0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots), \quad Px = (0, x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

   pour $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^\infty$.

   Vérifier qu'ils sont bornés et calculer leurs normes. Etudier s'ils sont ou non injectifs/surjectifs. Déterminer $S \circ T$ et $T \circ S$.