EPFL - automne 2024
ANALYSE FONCTIONNELLE I **Exercices**
Série 3 26 septembre 2024

1. Pour $1 \leq p < \infty$, prouver que la suite $\{e_n\} \subset l^p$ définie par $e_n = (\delta_{n,k})_{k\geq 1} \subset \mathbb{F}$ est une base de Schauder.

   Est-ce que l^∞ admet une base de Schauder?

2. Soient deux normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sur le même espace vectoriel X sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Elles sont dites *équivalentes* s'il existe deux constantes réelles $A, B > 0$ telles que

$$\forall x \in X \quad A||x||_1 \leq ||x||_2 \leq B||x||_1$$

   Un exercice du cours "Analyse Avancée II" assure que deux normes quelconques sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ sont toujours équivalentes ($n \geq 1$ étant un entier quelconque).

   A partir de ce résultat, montrer que deux normes quelconques sur l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ sont toujours équivalentes.

3. Si $(X, ||\cdot||)$ est un evn et si V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de X, montrer que V est un sous-ensemble fermé et que toutes les normes sur V sont deux à deux équivalentes.

   Remarques.

   1) L'espace euclidien/hermitien $(\mathbb{F}^n, <\cdot,\cdot>)$ est complet.

   2) Dans un espace métrique complet ou non, tout sous-espace métrique complet est fermé. Voir l'exercice 3 de la série 1.

4. Pour $-\infty < a < b < \infty$ et $f \in C([a,b], \mathbb{F})$, on définit

$$(Kf)(s) := \int_a^b k(s,t)f(t)dt, \quad a \leq s \leq b,$$

   où $k \in C([a,b]^2, \mathbb{F})$. L'"opérateur intégral" $K : (C[a,b], ||\cdot||_\infty) \to (C[a,b], ||\cdot||_\infty)$ est linéaire et borné. Vérifiez l'aspect borné.

5. Soient des evn $(X, ||\cdot||_X)$ et $(Y, ||\cdot||_Y)$. Montrer que tous les opérateurs linéaires $L : X \to Y$ sont bornés si X est de dimension finie.

   Indication: $x \to ||x||_X$ et $x \to ||x||_X + ||Lx||_Y$ sont des normes équivalentes sur X.

6. Soient un evn $(X, ||\cdot||)$ tel que $X \neq \{0\}$ et un opérateur surjectif $T \in \mathcal{L}(X)$. Montrer que T est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ ssi $\inf_{||x||=1} ||Tx|| > 0$. Dans ce cas,

$$||T^{-1}|| = \left(\inf_{||x||=1} ||Tx||\right)^{-1}$$