EPFL - automne 2024
**ANALYSE FONCTIONNELLE I** **Exercices**
Série 12 5 décembre 2024

1. A l'aide du théorème de Baire, prouver qu'un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable.

2. Soient des exposants conjugués $1 < p, q < \infty$. Si une suite $(\alpha_k) \subset \mathbb{F}$ est telle que, pour tout $(\xi_k) \in l^p$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k| < \infty$, prouver que $(\alpha_k) \in l^q$ en utilisant le principe de la borne uniforme.

3. Nous munissons $X = C([-1,1],\mathbb{F})$ de la norme $||f||_2 = \left(\int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$. Choisissons $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} g(t)dt = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in X$, soit
$$\phi_n(f) = n \int_{-1}^1 g(nt)f(t)dt.$$
Prouver que
   (a) $\phi_n \in X^*$ et $\lim_{n\to\infty} ||\phi_n||_{X^*} = \infty$;
   (b) pour tout $f \in X$, $\lim_{n\to\infty} \phi_n(f) = f(0)$.

   En déduire que $(X, ||\cdot||_2)$ n'est pas complet.

4. (a) Si $X$ et $Y$ sont deux evn sur $\mathbb{F}$, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $x_n \overset{wk}{\to} x$ dans $X$, montrer que $Tx_n \overset{wk}{\to} Tx$ dans $Y$.
   (b) Montrer que si $X$ est un evn et $x_n \overset{wk}{\to} x$, alors $\{x_n\}$ est une suite bornée.
   *Indication:* appliquer le principe de la borne uniforme à la suite $\{Jx_n\} \subset X^{**}$, où $J : X \to X^{**}$ est l'injection canonique.
   (c) Soient deux evn $X$ et $Y$ sur $\mathbb{F}$, et un opérateur linéaire compact $T : X \to Y$.
   Si $x_n \overset{wk}{\to} x$ dans $X$, prouver que $Tx_n \to Tx$ dans $Y$.