EPFL	**Hiver 2024-2025**
Analyse fonctionnelle I	**Série d'entraînement**
Enseignant: B. Buffoni **décembre 2024**	**Durée: 120 minutes**

Les résolutions des 3 questions seront données sur le recto et le verso des feuilles imprimées. Vos réponses doivent être soigneusement justifiées et toutes les étapes de votre raisonnement doivent y figurer. Ecrire lisiblement.

Les formulaires, les documents, les calculatrices et les portables (téléphones et ordinateurs) ne sont pas autorisés.

Question 1 (17 points)

(a) Soient des evn X et Y sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, avec Y complet. Soient une suite $\{T_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tels que $\lim_{n\to\infty} ||T_n - T|| = 0$. Si T_n est un opérateur linéaire compact pour tout $n \geq 1$, prouver que T est compact.

(b) Pour $-\infty < a < b < \infty$ et $k \in C([a,b]^2, \mathbb{F})$, soit l'opérateur intégral $K : C([a,b],\mathbb{F}) \to C([a,b],\mathbb{F})$ défini par

$$(Kf)(s) := \int_a^b k(s,t)f(t)dt, \quad s \in [a,b].$$

Soit encore une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C[a,b]$ bornée dans $(C[a,b], <.,.>)$, c'est-à-dire que

$$\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_a^b |f_n(t)|^2 dt \leq M^2.$$

Poser $g_n = Kf_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et prouver que la suite $\{g_n\} \subset C[a,b]$ satisfait les deux propriétés (H1) et (H2) suivantes:

$$\text{(H1)} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{a\leq s\leq b} |g_n(s)| < \infty,$$

$$\text{(H2)} \qquad \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall s_1, s_2 \in [a,b] \quad \Big(|s_1 - s_2| < \delta \Rightarrow |g_n(s_1) - g_n(s_2)| < \epsilon\Big).$$

Remarque: ce qui est demandé est la rédaction d'une étape de la preuve donnée au cours que $K : (C[a,b], <.,.>) \to (C[a,b], ||\cdot||_\infty)$ est compact.

(c) Soient des espaces vectoriels normés X et Y sur $\mathbb{F}$, et soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Prouver que T est compact si $T|_Z$ est compact pour un certain sous-espace vectoriel dense $Z \subset X$.

Question 2 (15 points)

(a) Soit un espace préhilbertien $(X, < \cdot, \cdot >)$ sur $\mathbb{F}$ et $A \in \mathcal{L}(X)$ symétrique, compact et tel que $\|A\| > 0$.

Prouver par induction qu'il existe une suite (finie ou infinie) $X = X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset ...$ de sous-espaces vectoriels et une suite $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), (\lambda_3, e_3)...$ dans $\mathbb{R} \times X$ telles que

(a_n) $< e_j, e_k >= \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k, \end{cases}$ et $Ae_k = \lambda_k e_k$ pour tous $1 \leq j, k \leq n$;

(b_n) $X = X_n \oplus \text{span}\{e_1, ..., e_{n-1}\}$;

(c_n) $X_n \perp \text{span}\{e_1, ..., e_{n-1}\}$;

(d_n) $R(A|_{X_n}) \subset X_n$, $A|_{X_n} \in \mathcal{L}(X_n)$, $|\lambda_n| = \|A|_{X_n}\| > 0$, $e_n \in X_n$,

pour $n = 1, 2, ...$ Dans (b_n) et (c_n), on pose $\text{span}\{e_1, ..., e_{n-1}\} = \{0\}$ si $n = 1$.

Prouver aussi que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ si ces suites sont infinies.

Indications. Ce qui est demandé est la rédaction d'une partie de la preuve de la première version du théorème spectral.

Si $(\widetilde{X}, < \cdot, \cdot >)$ est un espace préhilbertien et $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(\widetilde{X})$ est symétrique, compact et tel que $\|\widetilde{A}\| > 0$, vous pouvez utiliser sans le prouver que $\|\widetilde{A}\|$ ou $-\|\widetilde{A}\|$ est une valeur propre de $\widetilde{A}$ (ou les deux à la fois).

(b) Soit un espace hilbertien $(H, < \cdot, \cdot >)$ sur $\mathbb{F}$ et un sous-espace vectoriel fermé $M \subset H$. Fixons $x_0 \in H$, posons $d = \inf\{||x_0 - y|| : y \in M\}$ et considérons une suite $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset M$ telle que $\lim_{n\to\infty} ||x_0 - y_n|| = d$.

(i) Prouver que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy, qu'elle converge vers un certain $y_0 \in M$ et que $||x_0 - y_0|| = d$.

Indication: vous pouvez utiliser sans les prouver les deux identités

$$\begin{aligned} &||(y_n - x_0) - (y_m - x_0)||^2 \\ &\qquad = 2||y_n - x_0||^2 + 2||y_m - x_0||^2 - ||(y_n - x_0) + (y_m - x_0)||^2 \end{aligned}$$

et $||y_n - y_m||^2 = 2||y_n - x_0||^2 + 2||y_m - x_0||^2 - 4||x_0 - (y_n + y_m)/2||^2$, ainsi que la continuité de la norme.

(ii) Prouver que y_0 est uniquement déterminé.

Indication: vous pouvez utiliser sans la prouver l'égalité

$$||\tilde{y}_0 - y_0||^2 = 2||\tilde{y}_0 - x_0||^2 + 2||y_0 - x_0||^2 - 4||x_0 - (\tilde{y}_0 + y_0)/2||^2.$$

(iii) Prouver que $< v, x_0 - y_0 >= 0$ pour tout $v \in M$.

Indication: vous pouvez utiliser sans la prouver l'égalité

$$| < v, x_0 - y_0 > |^2 = d^2 - ||x_0 - y_0 - < x_0 - y_0, v > v||^2$$

valable pour tout $v \in M$ tel que $||v|| = 1$.

Question 3 (18 points)

(a) Soient des espaces de Banach X et Y sur $\mathbb{F}$, et soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjectif. Prouver que l'image par T de tout ouvert U dans X est un ouvert dans Y.

(C'est le théorème de l'application ouverte.)

Indication: vous pouvez utiliser sans le prouver le théorème préliminaire qui assure qu'il existe $c > 0$ tel que $B_Y(0, c) \subset T(B_X(0, 1))$.

(b) Prouver qu'un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable.

Indication: vous pouvez utiliser sans les prouver le théorème de Baire et le fait que, dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

(c) Soit un evn X sur $\mathbb{F}$ tel que X^* est séparable. Prouver que X est alors aussi séparable.

Indication. Si $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble dense de X^*, choisir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$ tel que $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}||f_n||$ et $||x_n|| \leq 1$. Prouver ensuite que $\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble dense de X, et conclure. Vous pouvez utiliser sans le prouver tout résultat du cours ex cathedra qui résulte du théorème d'extension de Hahn-Banach pour des fonctionnelles linéaires bornées.

Solutions.

Question 1.
(a) Cours, §3.13.
(b) Cours, §3.14.
(c) Série 6, exercice 1.

Question 2.
(a) Cours, §4.7.
(b) Série 10, exercice 2.

Question 3.
(a) Cours, §6.11 (partie qui suit le §6.12).
(b) Série 12, exercice 1.
(c) Série 11, exercice 4.

Lire le fichier "remarques-examen.pdf". En particulier,
- preuves données au cours: pas forcément complètes, mais des parties seules possibles;
- rédiger les (parties de) preuves avec le même degré de détails qu'au cours;
- exercices: en majorité ou en totalité adaptés des séries d'exercices.