

# École Polytechnique Fédérale de Lausanne

## MATH-233– Examen final Probabilités et statistiques (PH)

Instructor : Anthony Davison

28 janvier 2020

Nom et prénom : \_\_\_\_\_

SCIPER : \_\_\_\_\_

---

Cet examen contient 7 pages (y compris la page de couverture) et 4 questions. Bonne chance !

### Distribution de points

Question	Points	Score
1	16	
2	10	
3	6	
4	8	
Total:	40	

### PROTOCOL :

- Aucun document personnel n'est autorisé.
- Les calculatrices simples sont permises. Il est interdit de s'échanger les calculatrices ou d'utiliser d'autres aides électroniques, y compris des natels.
- Justifiez vos réponses ! Une réponse non justifiée sera considérée comme fausse.
- Ecrivez vos réponses sur les feuilles d'examen. Si vous manquez de place, demandez une nouvelle feuille et agrafez-la.
- Vous avez le droit de questionner un assistant seulement si vous trouvez une faute de frappe. Sinon ils ne vont pas vous répondre. S'il vous semble qu'une question n'est pas claire, alors expliquez dans votre solution comment vous la comprenez.
- Des traductions anglaises des questions sont disponibles, mais la version française est celle de référence.
- Vous pouvez donner vos réponses en français ou en anglais.

1. (16 points) (a) Un sac contient des boules numérotés de 1 à  $n$ . J'en tire deux boules ensemble au hasard. Donnez un espace de probabilité qui correspond à cette expérience aléatoire et ainsi obtenir la probabilité que mes deux boules ont des numéros successifs.
- (b) Un examen à choix multiple a 20 questions, chacune avec 5 réponses possibles. Un étudiant qui n'a pas préparé pour l'examen choisit ses réponses au hasard. Donner une expression pour la probabilité qu'il aura au moins dix réponses justes.
- (c) Si  $X$  suit la loi de Poisson avec paramètre  $\lambda$ , trouver  $E(X \mid X \geq 2)$ .
- (d) Trouver la médiane d'une variable aléatoire continue  $X$  de densité  $f_X(x) = \alpha x^{\alpha-1} \exp(-x^\alpha)$  pour  $x \geq 0$  et  $\alpha > 0$ .
- (e) Pour rappel, la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire  $X$  est  $M_X(t) = E(e^{tX})$ , définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $M_X(t) < \infty$ . Si  $X_1, X_2$  sont deux variables aléatoires exponentielles indépendantes et de paramètre  $\lambda$ , trouvez  $M_{X_1-X_2}(t)$ .
- (f) Si  $X$  est d'espérance 1 et de variance 1 et  $Y$  est d'espérance 2 et de variance 2, et si leur corrélation vaut  $\rho$ , trouver la variance de  $4 + 2X - Y$ . Comment choisir  $\rho$  pour minimiser cette variance ?
- (g) Est-il possible pour des données  $x_1, \dots, x_n$  d'avoir une moyenne  $\bar{x} = 0.3$ , une variance  $s^2 = 0$  et une étendue interquartiles de 0.1 ? Si oui, donnez un exemple. Si non, pourquoi pas ?
- (h) Qu'entend-on par 'l'intervalle de confiance à 95% pour l'inconnu est  $(L, U)$ ' ?

**English :**

- (a) A bag contains balls numbered from 1 to  $n$ . I draw two balls together at random. Give the sample space that corresponds to this random experiment and find the probability that my two balls have successive numbers.
- (b) A multiple-choice exam has 20 questions, each with 5 possible answers. A student who has not prepared for the exam chooses his answers at random. Give an expression for the probability that he will have at least ten correct answers.
- (c) If  $X$  has a Poisson distribution with parameter  $\lambda$ , find  $E(X \mid X \geq 2)$ .
- (d) Find the median of a continuous random variable  $X$  such that  $f_X(x) = \alpha x^{\alpha-1} \exp(-x^\alpha)$  for  $x \geq 0$  and  $\alpha > 0$ .
- (e) Recall that the moment-generating function of a random variable  $X$  is  $M_X(t) = E(e^{tX})$ , defined for all  $t \in \mathbb{R}$  such that  $M_X(t) < \infty$ . If  $X_1, X_2$  are independent exponential variables with parameter  $\lambda$ , find  $M_{X_1-X_2}(t)$ .
- (f) If  $X$  has mean 1 and variance 1 and  $Y$  has mean 2 and variance 2, and their correlation is  $\rho$ , find the variance of  $4 + 2X - Y$ . How do you choose  $\rho$  to minimize this variance ?
- (g) Is it possible for data  $x_1, \dots, x_n$  to have average  $\bar{x} = 0.3$ , variance  $s^2 = 0$  and interquartile range 0.1 ? If yes, give an example. If not, why not ?
- (h) What is meant by 'the 95% confidence interval for the unknown is  $(L, U)$ ' ?

2. (10 points) La sandwicherie de mon quartier vend de la soupe et des sandwiches.
- (a) Le patron prépare 40 litres de soupe quotidiennement. Chaque client choisit l'une des deux contenances de bol indépendamment et remplit celui-ci d'une quantité aléatoire de soupe. La quantité de soupe versée dans un petit bol est d'espérance 300ml et de déviation standard 30ml et la quantité versée dans un grand bol est d'espérance 600ml et de déviation standard 60ml. Si 50 clients choisissent un petit bol et 40 un grand, donner la distribution de la quantité totale de soupe consommée. Quelle la probabilité qu'il n'y ait pas suffisamment de soupe ?
  - (b) A l'ouverture de la sandwicherie, 100 sandwiches sont prêts à la vente, et après  $t$  heures, chacun a été vendu indépendamment avec probabilité  $1 - e^{-t}$ . Quelle est la probabilité qu'il n'y ait plus de sandwich si j'arrive quatre heures après l'ouverture ?
  - (c) Si la soupe et les sandwiches sont achetés indépendamment et que j'arrive quatre heures après l'ouverture, une fois que tout le monde a eu sa soupe, quelle est la probabilité que je trouve quelque chose pour mon dîner ?

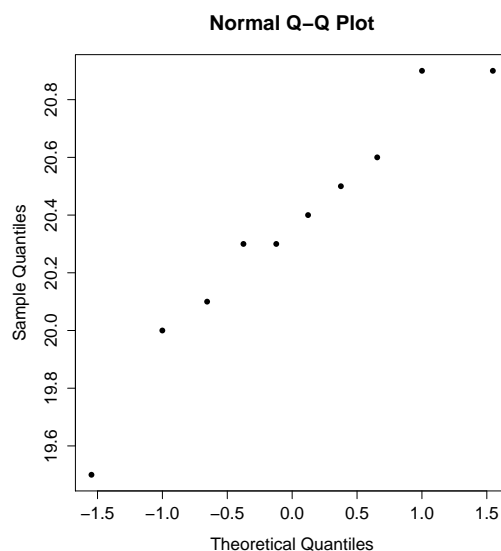
**English :** My local sandwich bar serves only soup and sandwiches.

- a) The chef makes 40 litres of soup each day. Customers each independently choose one of two sizes of soup bowl, and fill it with a random amount of soup. The amount of soup put into a small bowl has expectation 300 ml and standard deviation of 30 ml, and the amount put into a large bowl has expectation 600 ml and standard deviation 60 ml. If 50 clients choose small bowls and 40 clients choose large bowls, give the distribution of the total amount of soup consumed. What is the probability that there will not be enough soup today ?
- b) When the bar opens, there are 100 sandwiches for sale, and after  $t$  hours each has been sold independently with probability  $1 - e^{-t}$ . What is the probability that no sandwiches are left, if I arrive 4 hours after opening time ?
- c) If soup and sandwiches are sold independently and I arrive four hours after opening time, when everyone else has had their soup, what is the probability that I will find something for my lunch ?

3. (6 points) Marco et Chris préparent chacun leur valise pour partir en Thaïlande. La compagnie aérienne fait payer une surtaxe aux voyageurs dont le poids du bagage excède 20 kg.
- (a) Marco prépare sa valise, puis la pèse dix fois en utilisant le pèse-personne de sa salle de bains, donnant les poids (kg)

20.0 21.0 20.8 20.7 19.6 20.9 20.0 20.7 21.0 20.8

Il obtient ensuite le graphique suivant :



- (i) Expliquer ce qu'est ce graphique et pourquoi il est utile.
- (ii) Que déduisez-vous de ce graphique ?
- (b) Chris est plus consciencieux. Il utilise sa balance de cuisine pour peser individuellement chaque objet qu'il va emporter y compris sa valise. Le poids total des 49 objets, valise incluse, est de 19.9 kg. Le fabricant stipule que la balance de cuisine a une déviation standard de 4 g pour chaque pesée. Quelle est la probabilité que Chris payera une surtaxe ?

**English :** Now that their exams are over, Marco and Chris are each packing a suitcase before flying to Thailand for a holiday. The airline fines travellers whose suitcases weigh more than 20 kg.

- (a) Marco packs his suitcase, and then weighs it 10 times using the bathroom scales, resulting in weights (kg)

20.0 21.0 20.8 20.7 19.6 20.9 20.0 20.7 21.0 20.8

He then produces the above plot.

- (i) Explain what such a plot is, and why it is useful.
- (ii) What do you deduce in this case ?
- (b) Chris uses the kitchen scales to weigh individually each item he will take, including his suitcase. The total weight of these 49 objects equals 19.9 kg. The manufacturer claims that the kitchen scales have a standard deviation of 4 g for each item weighed. What is the probability that Chris will be fined ?

4. (8 points) Chaque année, on mesure la hauteur maximale  $X$  d'une rivière. Une valeur supérieure à 6 m serait catastrophique. La distribution de  $X$  est supposée être de Rayleigh, sa densité est

$$f_X(x) = (x/a)e^{-x^2/(2a)}, \quad x > 0, \quad a > 0,$$

où  $a$  est inconnu. Nous avons observé les hauteurs (m) suivantes sur 8 ans :

2, 5,   2, 9,   1, 8,   0, 9,   1, 7,   2, 1   2, 2,   2, 8.

- (a) Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance et l'information observée de  $a$ .
- (b) Une compagnie d'assurance estime qu'une catastrophe ne se produit en moyenne qu'une fois tous les mille ans. Les données sont-elles en accord avec cette proposition ?
- (c) Calculer un écart-type pour la probabilité estimée  $p$  d'une catastrophe dans une année quelconque, et l'utiliser pour donner un intervalle de confiance pour  $p$ . Discutez.

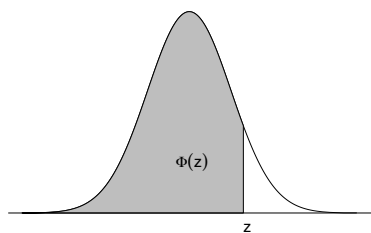
**English :** Each year, the maximum height  $X$  of a river is measured. A value over 6 m would be catastrophic. The distribution of  $X$  is supposed to be Rayleigh, i.e., its density is

$$f_X(x) = (x/a)e^{-x^2/(2a)}, \quad x > 0, \quad a > 0,$$

where  $a$  is unknown. We observed the following heights (m) over 8 years :

2.5,   2.9,   1.8,   0.9,   1.7,   2.1   2.2,   2.8.

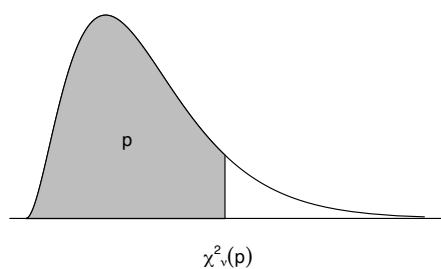
- (a) Give the maximum likelihood estimate for  $a$  and the observed information.
- (b) An insurance company estimates that a catastrophe only happens on average once every thousand years. Can this be justified by the data ?
- (c) Compute a standard error for the estimated probability  $p$  of a catastrophe in any given year, and use it to give a confidence interval for  $p$ . Discuss.

Distribution normale standard  $\Phi(z)$ 

Pour  $z < 0$  on utilise la symétrie :  $\Pr(Z \leq z) = \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56750	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84850	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92786	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

## Distribution $\chi^2_\nu$



Quantiles  $\chi^2_\nu(p)$  pour la distribution en khi-deux à  $\nu$  degrés de liberté.

$\nu$	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.999
1	0	.0002	.010	.0039	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.	104.	112.