A. Exercices standards.

Exercice 8.1. On considère les fonctions suivantes : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = x^2y + 2\,x^2 - 2\,xy - 4\,x + y \quad \textbf{et} \quad g(x,y,z) = 2xy - 3yz.$$

(a) Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{R}$ la courbe de niveau $f^{-1}(c)$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

(b) Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{R}$ la surface de niveau $g^{-1}(c)$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8.2. (a) Soit $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un point régulier de la surface S surface définie par l'équation $f(x,y,z) = 0$. Prouver que le plan vectoriel tangent T_pS est le plan orthogonal au gradient $\vec{\nabla} f(p)$.
(b) Le *plan affine tangent* à une surface S en un point régulier p est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ tels que le vecteur $\overrightarrow{pq} \in T_pS$. Montrer que le plan affine tangent est donné par

$$A_pS = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q - p, \vec{\nabla} f(p)\rangle = 0\}.$$

(c) En appliquant le résultat précédent, obtenir la formule donnant l'approximation du premier ordre d'une fonction différentiable de deux variables $z = \varphi(x,y)$ au voininage d'un point (x_0, y_0) (série de Taylor à l'ordre 1).

Exercice 8.3. Montrer que l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ est une surface régulière (i.e. une sous-variété de dimension 2) et calculer son plan affine tangent en un point $p = (x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 8.4. On dit que deux sous-variétés différentiables M_1 et M_2 de $\mathbb{R}^n$ *s'intersectent transversalement* en un point p si $p \in M_1 \cap M_2$ et en ce point les espaces tangents vérifient $T_pM_1 + T_pM_2 = \mathbb{R}^n$.

(a) Donner un exemple d'une surface et d'une courbes régulières $\mathbb{R}^3$ qui s'intersectent en un point unique, mais de façon non transverse.

(b) Montrer que si S est une surface et C une courbe de $\mathbb{R}^3$ (toutes deux régulières), qui s'intersectent transversalement en $0 \in \mathbb{R}^3$, alors on peut construire un système de coordonnées locales (u, v, t) au voisinage de 0 telles que (u, v) sont des paramètres locaux de la surface S et t un paramètre local de la courbe C.

(c) Dans la même situation que en (b), prouver que 0 est un point isolé de l'intersection $S \cap C$ (i.e. il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^3$ tel que $V \cap S \cap C = \{0\}$).

Remarque : Dire qu'une courbe ou une surface est *régulière* signifie qu'elle est une sous-variété de classe C^k, avec $k \geq 1$.

Exercice 8.5. La *fenêtre de Viviani* est la courbe d'intersection d'une sphère avec un cylindre circulaire droit qui passe par le centre de la sphère et dont le diamètre est le rayon de la sphère. Si le rayon de la sphère est 1, on peut donc admettre (quitte à appliquer une isométrie) que la fenêtre de Viviani est définie par les équations:

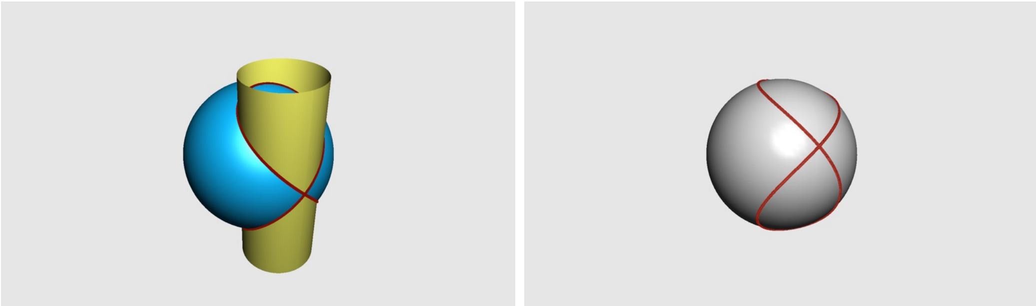
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \textbf{et} \qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

On notera cet ensemble V.

(a) Montrer par un argument géométrique qu'il existe un point $q \in V$ tel que le complémentaire $V \setminus \{q\}$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^3$. Quel sont les coordonnées de q (on admettra un argument heuristique) ?

(b) Prouver rigoureusement à partir des équations de V que $V \setminus \{q\} \subset \mathbb{R}^3$ est une sous-variété différentiable.

(c) Trouver une paramétrisation régulière de cette courbe.



B. Exercices supplémentaires.

Exercice 8.6. On a vu à l'exercice 7.3 que $O(n)$ et $SL_n(r)$ sont des sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

a) Décrire l'espace tangent $T_I SL_n(\mathbb{R})$ à la sous-variété $SL_n(r) \subset M_n(\mathbb{R})$ au point I (= la matrice identité).

b) Décrire l'espace tangent $T_I O(n)$ à la sous-variété $O(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ au point I.