



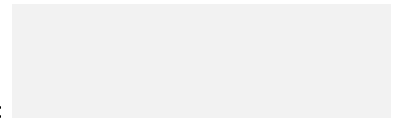
1

Alexis Michelat
Analyse III MATH-203(a) - MT-SV
16 janvier 2024
Durée : 180 minutes

Marie-Sophie Germain

SCIPER: 235112329

Signature :















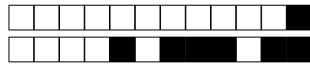
Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.

Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, les dernières pouvant être vides, et 21 questions (15 questions de QCM, chacune valant 1 point, et 6 exercices à rédaction détaillée valant 45 points en tout). Le total des points de l'examen est de 60.

Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table (avec le côté photo *visible*).
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout autre outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour le questionnaire à **choix multiples**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte;
 - 0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite, ou si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Formulaire

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} e^{ia} &= \cos(a) + i \sin(a) & 2 \cos(a) \cos(b) &= \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ \cos^2(a) + \sin^2(a) &= 1 & 2 \sin(a) \sin(b) &= \cos(a-b) - \cos(a+b) \\ \cos(2a) &= 2 \cos^2(a) - 1 & 2 \sin(a) \cos(b) &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \\ \cos(2a) &= 1 - 2 \sin^2(a) & \cos(a+b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \sin(2a) &= 2 \cos(a) \sin(a) & \sin(a+b) &= \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a) \\ \cosh(a) &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} & \sinh(a) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \end{aligned}$$

Première partie, questionnaire à choix multiples (+1/0) (15 points)

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 (1 point) Soit $f :]-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$, étendue par 2-périodicité. Alors, si $S(f)$ est la série de Fourier de f , on a:

☐ $S(f)(-1) = \sin(1).$

☐ $S(f)(-1) = 0.$

☐ $S(f)(-1) = -\sin(1).$

☐ La limite $S_N(f)(-1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{-\pi i n}$ n'existe pas.

Question 2 (1 point) Soit $f(x, y) = e^{2x} \sin(x + 2y)$. Alors, le laplacien Δf de f est donné par:

☐ $4e^{2x} \cos(x + 2y) - e^{2x} \sin(x + 2y)$

☐ $2e^{2x} \cos(x + 2y) - e^{2x} \sin(x + 2y)$

☐ $4e^{2x} \cos(x + 2y) + e^{2x} \sin(x + 2y)$

☐ $2e^{2x} \cos(x + 2y) + e^{2x} \sin(x + 2y)$

Question 3 (1 point) Si H est la fonction de Heaviside, telle que

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

et $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est la masse de Dirac en 0 (telle que $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$), que vaut la convolution suivante au sens des distributions?

$$[x^4] * \left(\delta_0^{''''} * \left[H(x) H(1-x) e^{-x^2} \right] \right)$$

☐ Cette convolution n'est pas bien définie.

☐ $\delta_0 - e^{-1} \delta_1$

☐ δ_0

☐ 0

Question 4 (1 point) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit T_n la distribution donnée par

$$T_n = n^3 \delta_{\frac{1}{n}} + n^3 \delta_{-\frac{1}{n}} - 2n^3 \delta_0 - n \delta_0'',$$

où δ_a est la masse de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$. Alors, la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ au sens des distributions (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) est donnée par:

☐ δ_0''

☐ 0

☐ $-\frac{1}{3} \delta_0'''$

☐ δ_0



Question 5 (1 point) Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on note $B(x, r) = \mathbb{R}^2 \cap \{y : |y - x| < r\}$ le disque de centre x et de rayon r . Soit $X \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2)$ un champ de vecteurs tel que $\text{rot}(X) = 0$ et

$$\int_{\partial B(2,1)} X \cdot dl = 0.$$

Alors:

- ☐ L'intégrale de X le long de toute courbe régulière fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est nulle. ☐ X est exact.
- ☐ X n'est pas exact. ☐ On ne peut rien conclure.

Question 6 (1 point) Soit $f(x) = \exp(x^3 \sin(x))$. Quelle affirmation est correcte?

- ☐ $[f]$ est une distribution à support compact ($[f] \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$).
- ☐ $[f]$ est une distribution ($[f] \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$).
- ☐ $[f]$ est une distribution tempérée ($[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$).
- ☐ $[f]$ n'est pas une distribution ($[f] \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

Question 7 (1 point) Soit $F(x, y) = (y \sinh(xy), x \sinh(xy))$ et $G(x, y) = (y \cosh(xy), -x \sinh(xy))$. Alors, les champs de vecteurs exacts sont:

- ☐ F et G . ☐ G . ☐ F . ☐ Aucun des deux.

Question 8 (1 point) Soit $f(x) = \cos(2023x) \sin(x)$ vue comme fonction 2π -périodique. Alors, on a:

- ☐ $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2023, -1, 1, 2023\}$.
- ☐ $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2023\}$.
- ☐ $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2024, -2022, 2022, 2024\}$.
- ☐ $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2023, -1\}$.

Question 9 (1 point) Soit $T = \sum_{k=0}^{\infty} (\delta_{k+1} - \delta_k)$, où δ_k est la masse de Dirac en $k \in \mathbb{Z}$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait $\delta_k(\varphi) = \varphi(k)$. Alors, on a:

- ☐ $T = -\delta_0$ ☐ La série ne converge pas au sens des distributions (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).
- ☐ $T = 0$ ☐ $T = \delta_0$

Question 10 (1 point) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution

$$T = \frac{\sin(2\pi t)}{t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k,$$

où δ_k est la masse de Dirac en $k \in \mathbb{Z}$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait $\delta_k(\varphi) = \varphi(k)$. Alors, on a:

- ☐ $T = 2\pi \delta_0$ ☐ $T = -2\pi \delta'_0$ ☐ $T = 2\pi \delta'_0$ ☐ $T = -2\pi \delta_0$



Question 11 (1 point) Admettons que la transformée de Fourier de $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est donnée par $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn}(1 + \xi) + \operatorname{sgn}(1 - \xi))$, où

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ est égale à:

☐ ∞

☐ π

☐ 2π

☐ $2\pi^2$

Question 12 (1 point) Soit $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^4}$. Alors, la transformée de Fourier de f est donnée par:

☐ $\widehat{f}(\xi) = -\frac{\pi}{48} (\xi^3 + 6\xi^2 + 15\xi + 15) e^{-\xi}.$

☐ $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{48} (\xi^3 + 6\xi^2 + 15\xi + 15) e^{-\xi}.$

☐ $\widehat{f}(\xi) = -\frac{\pi}{48} (|\xi|^3 + 6\xi^2 + 15|\xi| + 15) e^{-|\xi|}.$

☐ $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{48} (|\xi|^3 + 6\xi^2 + 15|\xi| + 15) e^{-|\xi|}.$

Question 13 (1 point) On admet que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ est égale à

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \pi(1 - |\xi|) & \text{si } -1 \leq |\xi| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\xi| > 1. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale suivante $I = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$ est égale à:

☐ π

☐ $\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

☐ $\pi\sqrt{2\pi}$

☐ $\frac{\pi}{2}$

Question 14 (1 point) Soit $f(x) = |\cos(x)|$ et admettons que les coefficients de Fourier de f (vue comme fonction 2π -périodique) vérifient l'identité suivante $|c_n(f)| = \frac{2}{\pi} \frac{1}{|n^2 - 1|}$ si $n \in \mathbb{Z}$ est pair, et $c_n(f) = 0$ sinon

(c'est-à-dire, si n est impair). Alors, la série $S = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$ vaut:

☐ $\frac{\pi^2}{8} + 1$

☐ $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$

☐ $\frac{\pi^2}{8} - 1$

☐ $\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}$

Question 15 (1 point) Soit $f :]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos\left(\frac{x^2}{\pi^2}\right)$ étendue par 2π -périodicité sur \mathbb{R} . Alors, on a:

☐ $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) < 0$.

☐ $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) > 0$.

☐ $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) < 0$.

☐ $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) > 0$.



Deuxième partie, questions ouvertes

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Chaque résultat du cours utilisé doit être précisément énoncé.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées aux correcteurs.

Question 16: *Cette question est notée sur 4 points.*

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0	1	2	3	4

On considère la fonction

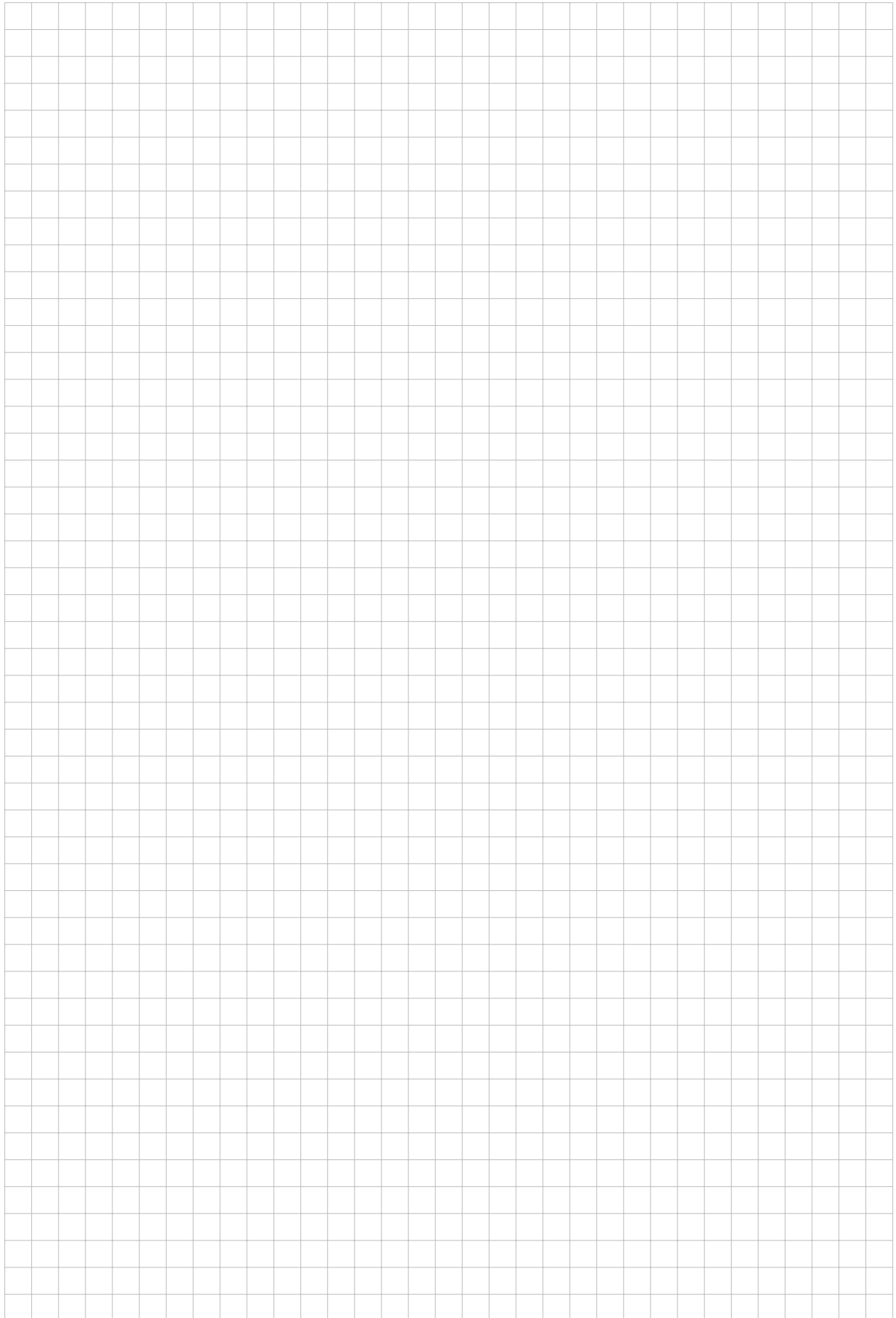
$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\rightarrow (\cos^3(\theta), \sin^3(\theta))\end{aligned}$$

Calculer la longueur de la courbe fermée $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.





+1/6/55+





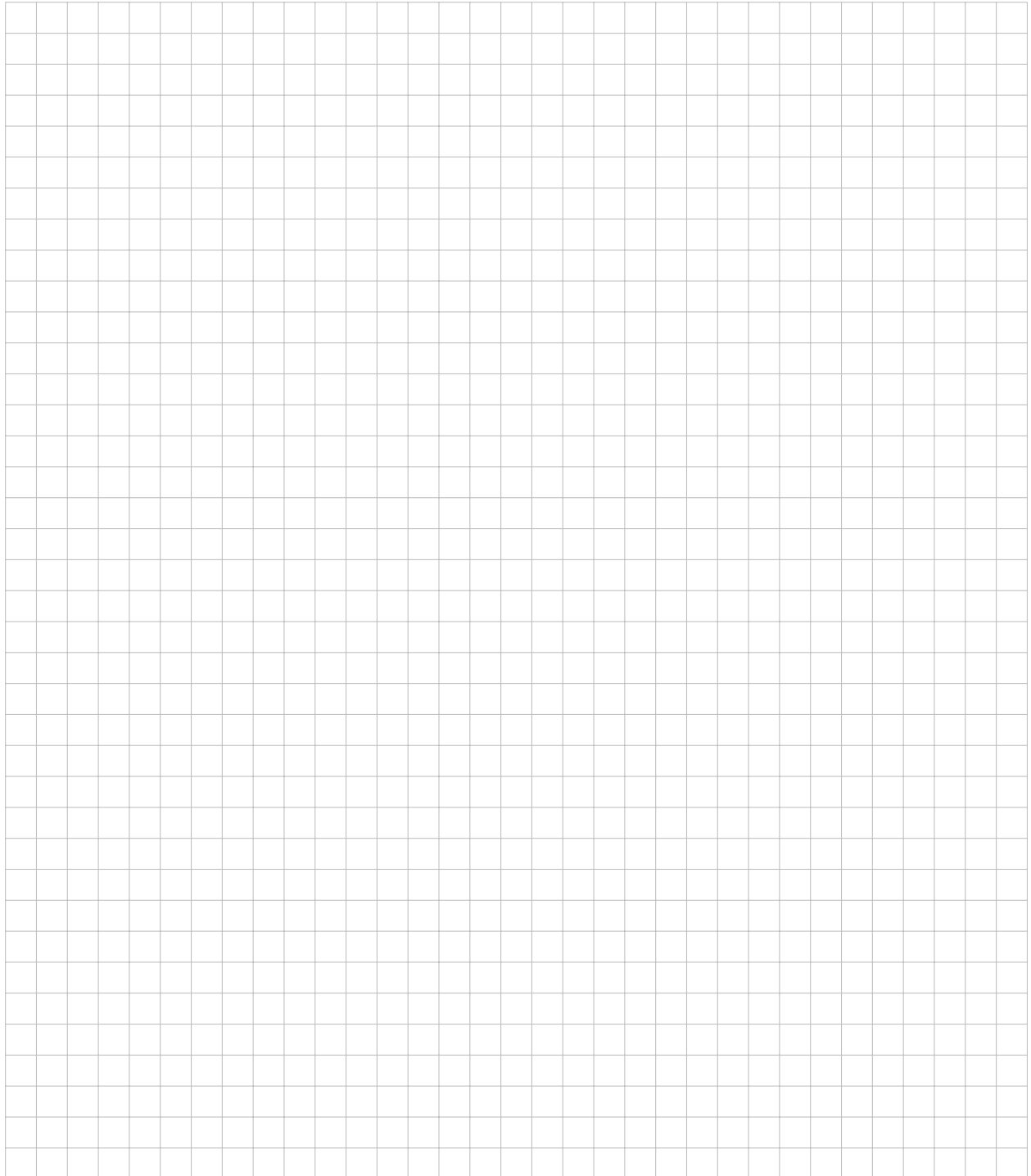
Question 17: *Cette question est notée sur 6 points.*

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆

Vérifier le théorème de Gauss-Green sur le domaine suivant:

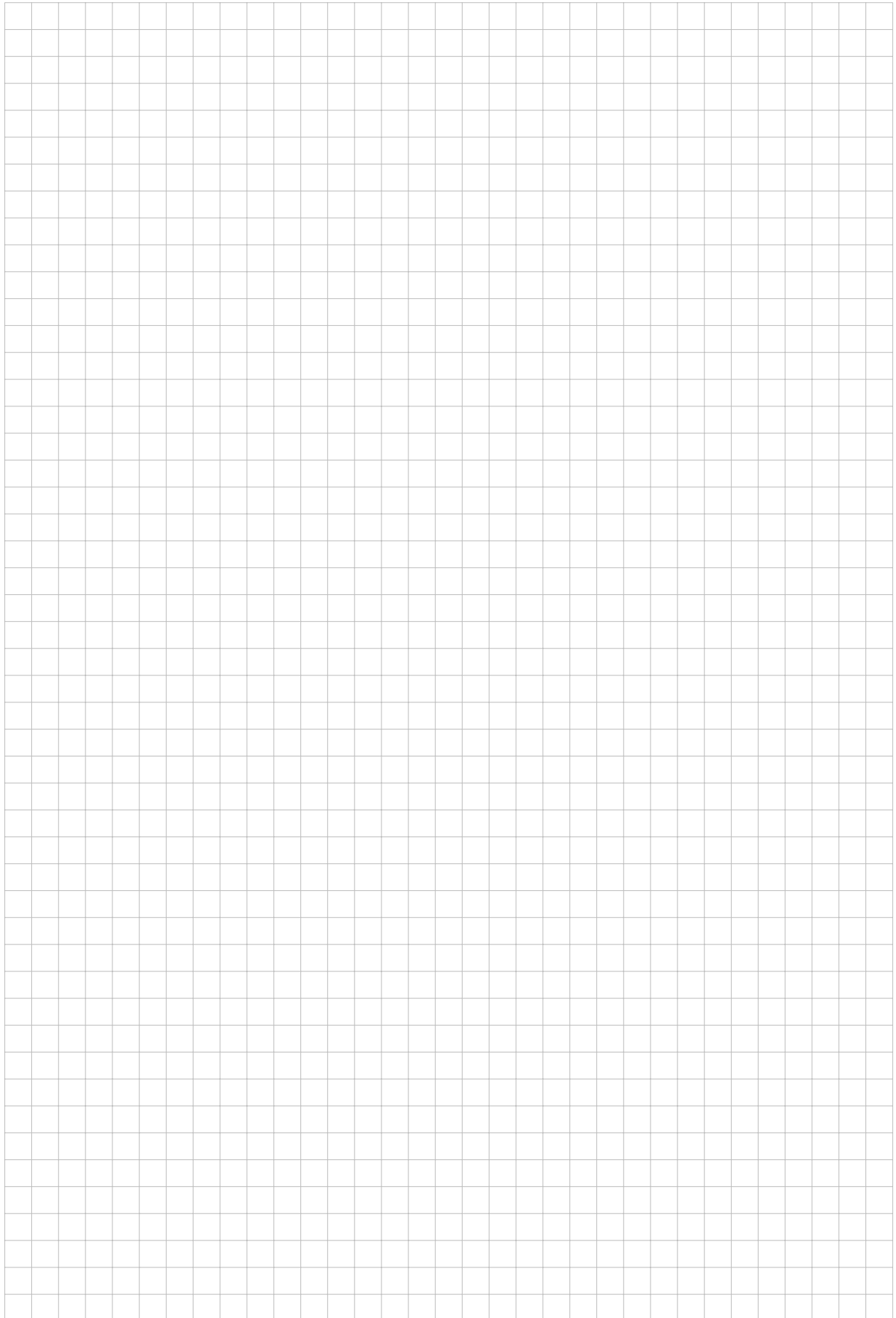
$$\Omega = \mathbb{R}^2 \cap \{(x, y) : 0 < y < 8x - 12x^2 + 6x^3 - x^4, x > 0\}$$

avec le champ de vecteurs $X(x, y) = (-y, x)$.





+1/8/53+





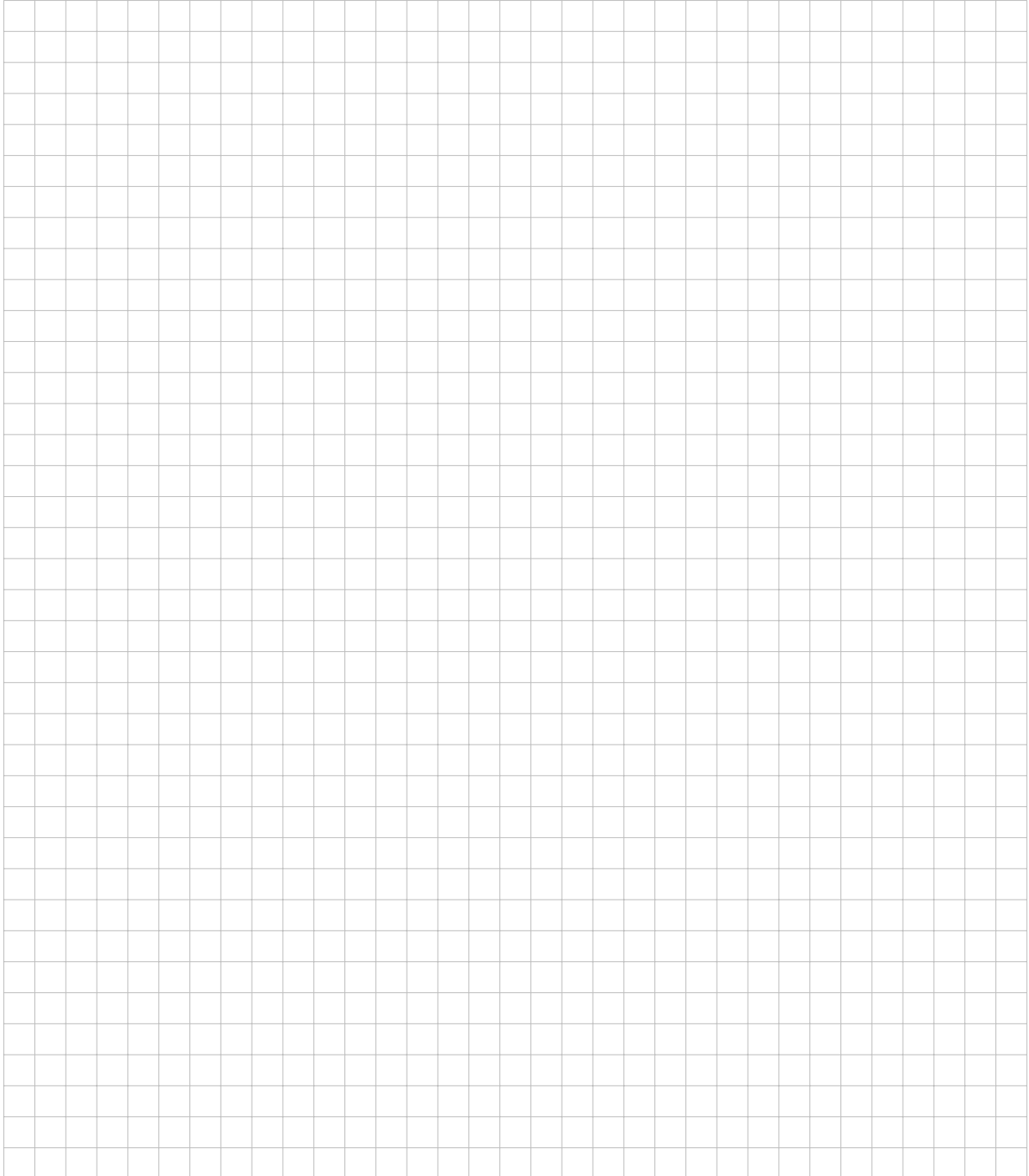
Question 18: *Cette question est notée sur 10 points.*

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇ ₈ ₉ ₁₀

Calculer le volume du domaine

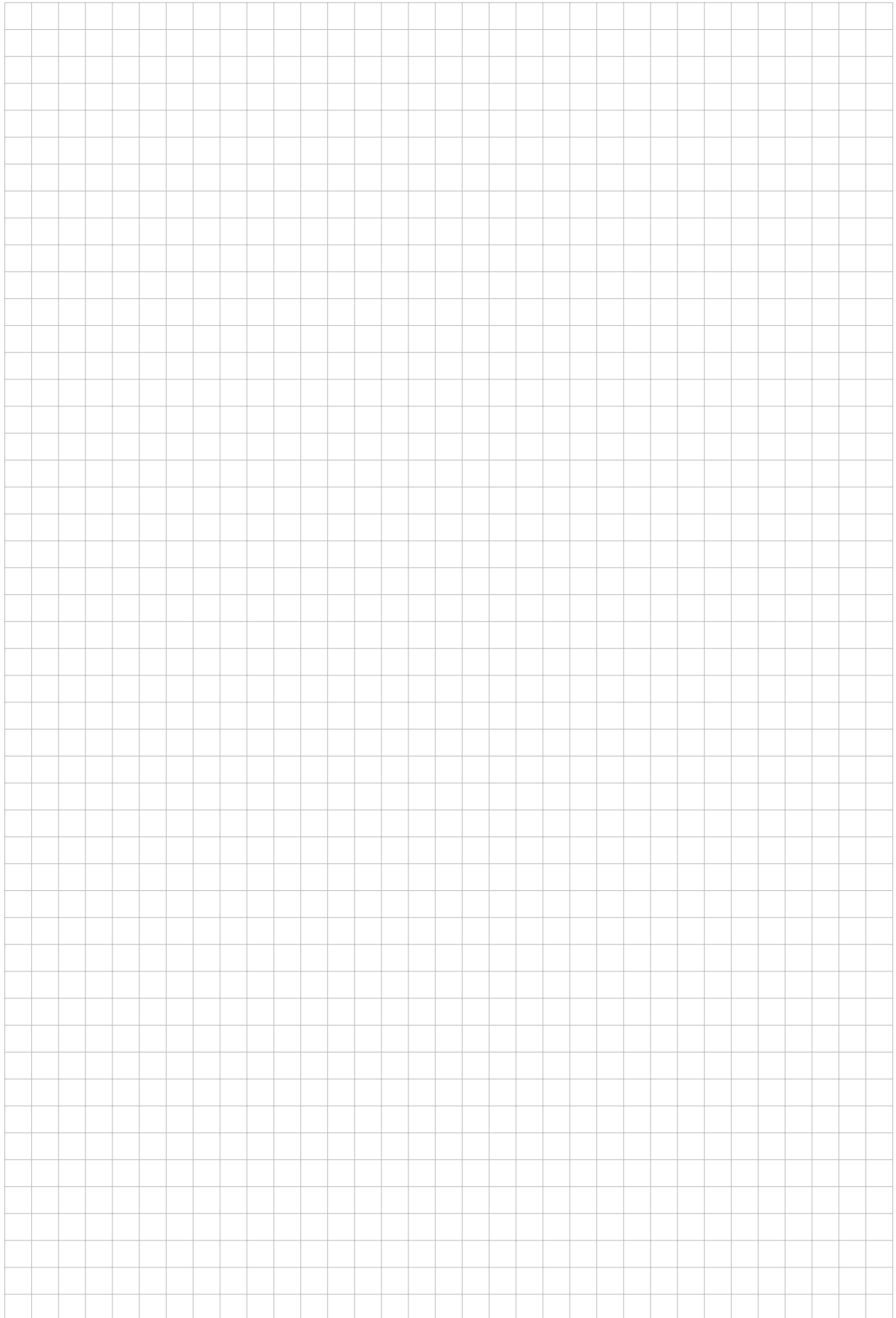
$$\Omega = \mathbb{R}^3 \cap \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1, -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2} \right\}$$

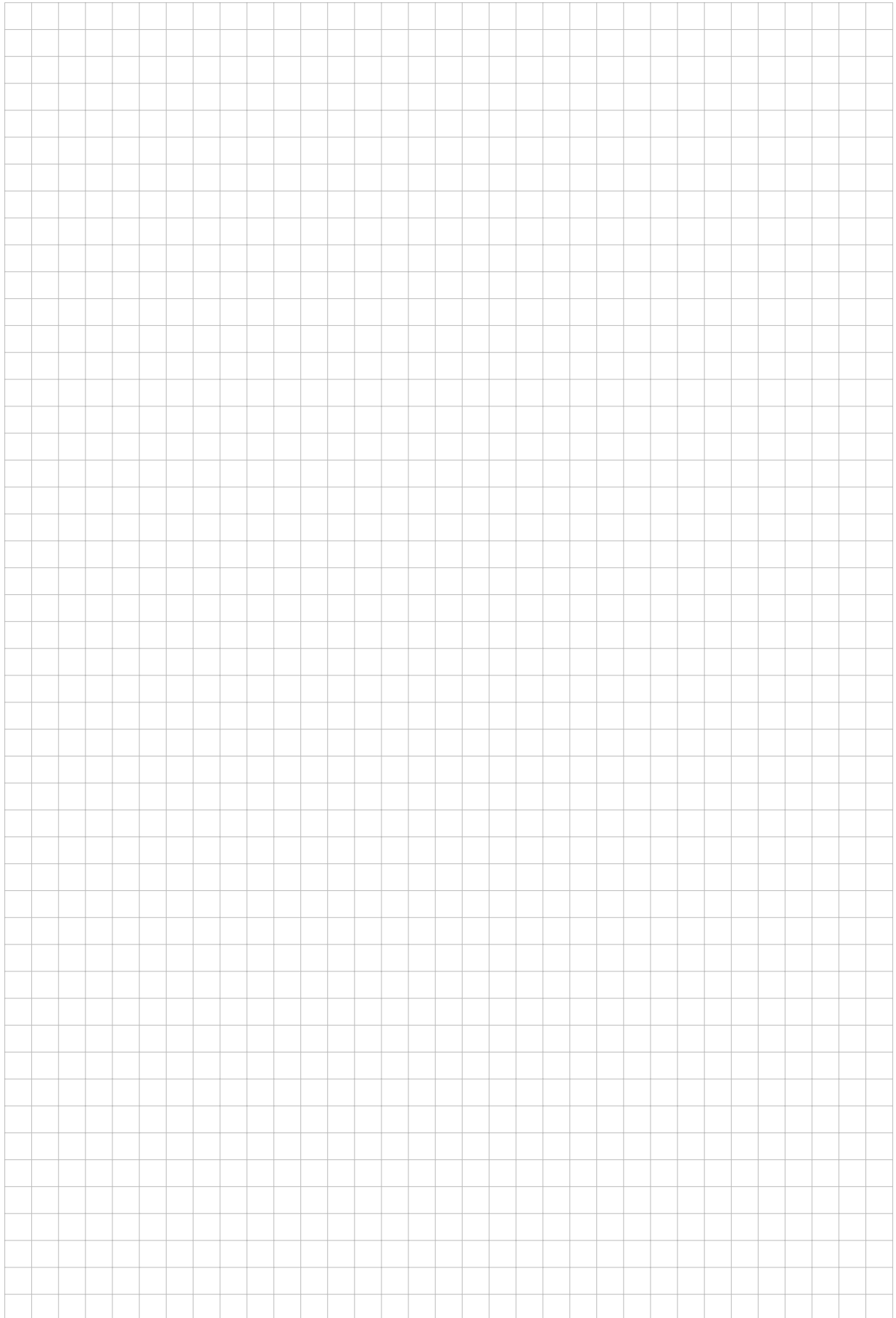
et vérifier le résultat à l'aide du théorème de la divergence.





+1/10/51+







Question 19: *Cette question est notée sur 9 points.*

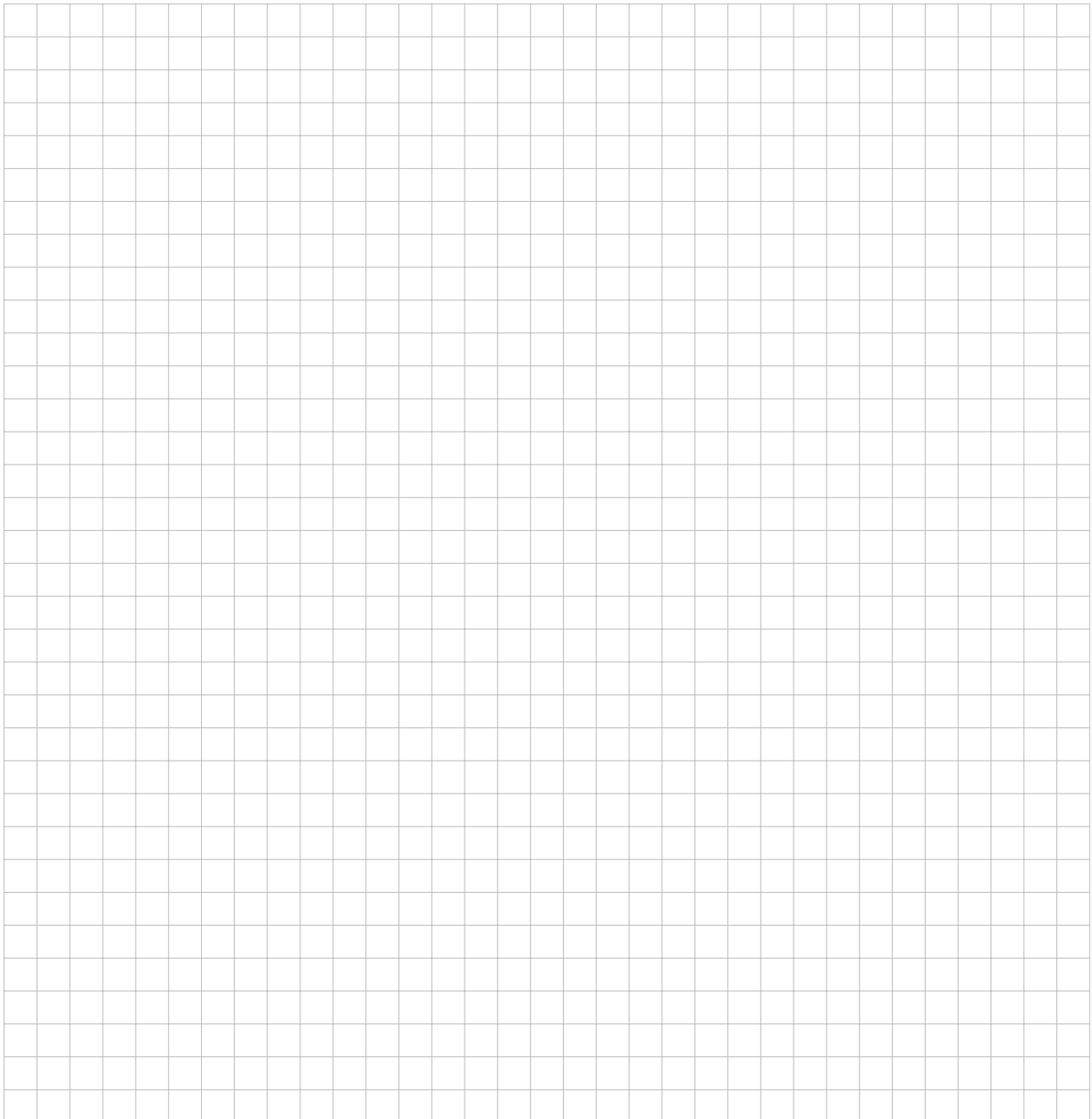
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

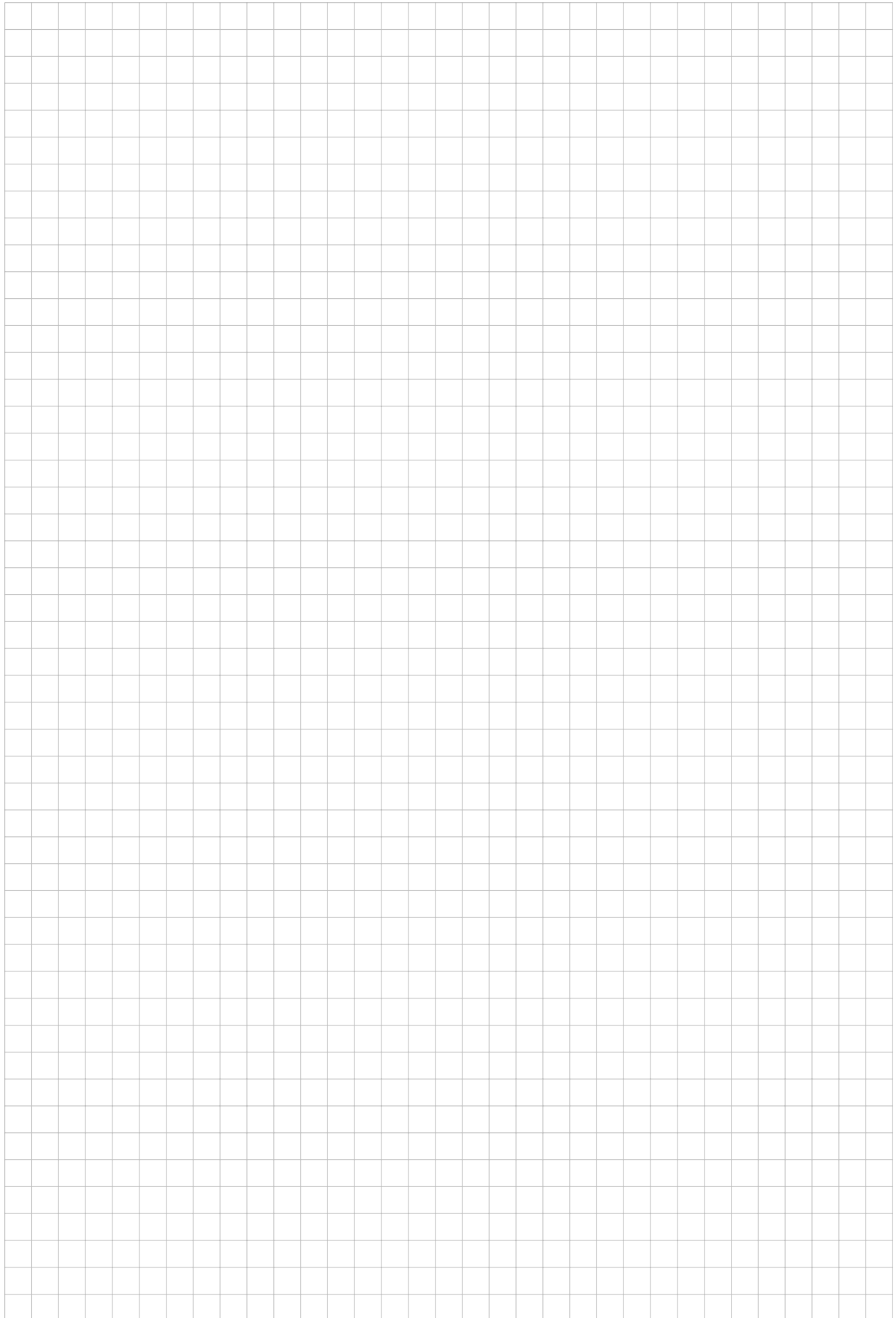
Soit

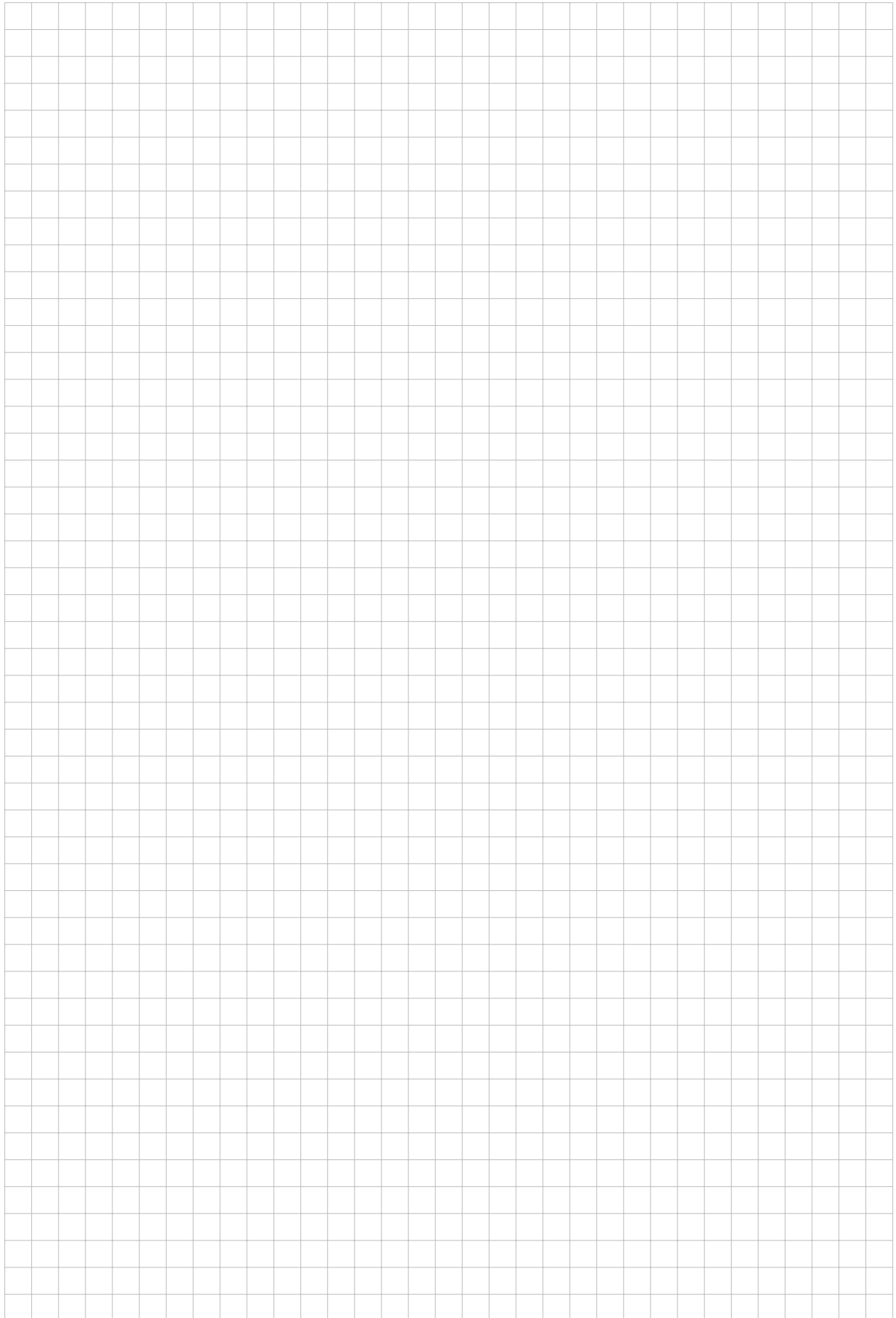
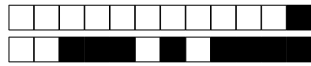
$$\Sigma = \mathbb{R}^3 \cap \left\{ (x, y, z) : x^2 + z^2 = y^3(1 - y)^3, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Vérifier le théorème de Stokes sur la surface à bord Σ avec le champ de vecteurs

$$X(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$









Question 20: Cette question est notée sur 8 points.

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇ ₈

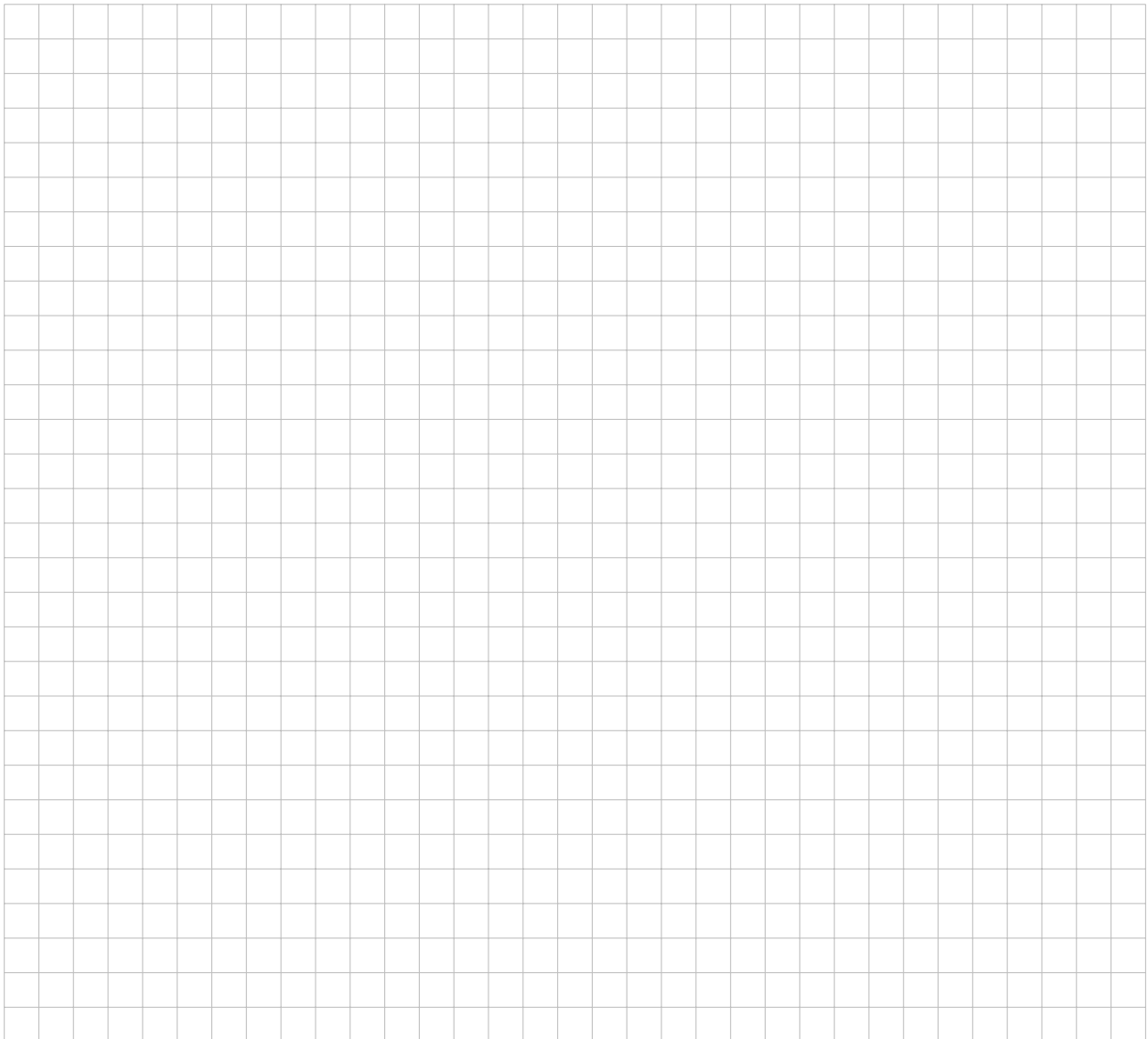
Soit $f(x) = e^{|x|}$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$, étendue par 2π -périodicité sur \mathbb{R} .

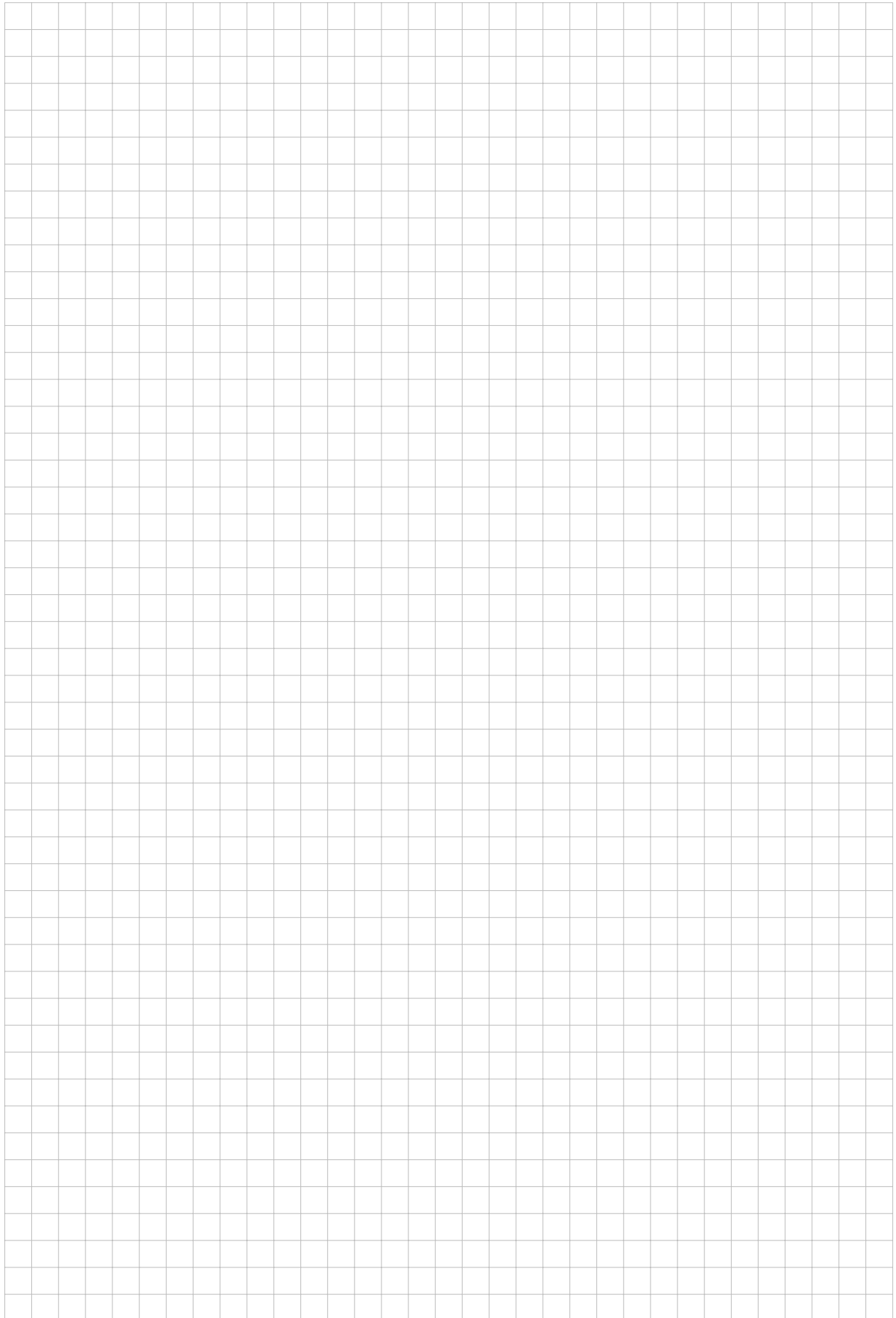
- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier de f est donné par

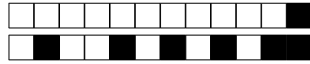
$$c_n(f) = \frac{1}{\pi} \frac{e^\pi (-1)^n - 1}{1 + n^2}.$$

- 2) À l'aide d'un théorème du cours que l'on rappellera, calculer la valeur des deux séries (et simplifier le résultat):

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2}.$$







Question 21: *Cette question est notée sur 8 points.*

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
0	1	2	3	4	5	6	7	8	

Soit

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} e^{-|x|}.$$

On rappelle que la transformée de Fourier de $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-|x|}$ est donnée par

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}.$$

- 1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)e^{-|x|}$.
- 2) En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et la question 1), calculer $\frac{d}{d\xi} \widehat{f}(\xi)$ en fonction de $\widehat{g}(\xi)$.
- 3) À l'aide d'un théorème du cours que l'on énoncera, montrer que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\xi^2}{2}\right),$$

et en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} dx.$$



