Série 5

Mots-clés: déterminants, matrices élémentaires, inversibilité.

Question 1
Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 2

a) Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Comment le déterminant dépend t-il de l'angle φ ? Pourquoi ?

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Question 3
Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes. Indiquer à quelle opération élémentaire chaque matrice correspond.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 4
Étudier, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, l'inversibilité des matrices $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ ci-dessous, en calculant leur déterminant.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \qquad B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Question 5 Calculer le déterminant de la matrice ci-dessous, en la transformant progressivement à l'aide de transformations élémentaires.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 6
Soit a un paramètre réel et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Alors A est singulière (c'est-à-dire non inversible) si

- ☐ $a \notin \{1, 3\}$
- ☐ $a \in \{1, -1\}$
- ☐ $a \in \{1, 3\}$
- ☐ $a \notin \{1, -1\}$

Question 7

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ $\det(A) = 0$
- ☐ $\det(A) = 9$
- ☐ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{24}$
- ☐ $\det(A^T) = -24$

2) Soit A la matrice 2×2 d'une homothétie de rapport 4 dont le centre est l'origine. Alors

- ☐ $\det(A) = 4$
- ☐ $\det(A) = 16$
- ☐ $\det(A) = 8$
- ☐ $\det(A) = 0$

3) Soit T l'application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ obtenue en effectuant d'abord une symétrie axiale d'axe $x = y$, puis la projection orthogonale sur l'axe $x = 0$. Soit A la matrice 2×2 de cette application linéaire.

- ☐ $\det(A) = 1$
- ☐ $\det(A) = 0$
- ☐ $\det(A) = -2$
- ☐ $\det(A) = -1$

4) Soit A une matrice de taille 5×5. On change le signe de chaque coefficient pour obtenir la matrice B. Alors on a

- ☐ $\det(A) = -\det(B)$
- ☐ $\det(B) = 0$
- ☐ $\det(A) = \det(B)$
- ☐ $\det(A) = 5\det(B)$

Question 8 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si B est obtenue en échangeant deux lignes de A, alors $\det(B) = \det(A)$.

b) Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det(A) = 0$.

c) Le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux de A.

d) Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors A est inversible.

e) Si deux lignes d'une matrice A de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det(A) = 0$.

f) Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$.

g) Si A et B sont des matrices de taille $n \times n$ telles que $\det(A) = 2$ et $\det(B) = 5$, alors $\det(A + B) = 7$.

h) Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale.

i) Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Question 9

a) Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Calculer l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

b) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer le volume du paralléllépipède construit sur $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$.