Série 2

Mots-clés: Espaces $\mathbb{R}^n$, équations vectorielles, combinaisons linéaires, partie engendrée par des vecteurs, équations matricielles, espace des colonnes, multiplication matrice-vecteur, systèmes (in)homogènes.

Question 1 Soient les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

i) Est-il possible d'écrire $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$?

ii) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Question 2

Prenons les vecteurs $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$ le vecteur $\vec{b}$ est-il combinaison linéaire de $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$?

- ☐ $\alpha = -\frac{5}{2}$
- ☐ $\alpha = -\frac{7}{2}$
- ☐ $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{7}{2}$
- ☐ $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{5}{2}$

Question 3
Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

i) Écrire le système sous forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$.

ii) Écrire le système comme combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

iii) Trouver la solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$.

iv) Écrire l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre.

Question 4

a) Soient les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$.

i) Pour quelle(s) valeur(s) de h le vecteur $\overrightarrow{w}$ peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$?

ii) Dans ce cas quels sont les coefficients a_1, a_2 des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$?

b) Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$? Justifiez votre réponse.

Question 5 Soit $V = \text{Vect}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ avec

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des affirmations suivantes est correcte?

- ☐ V contient une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ $V = \varnothing$.
- ☐ $V = \mathbb{R}^4$.
- ☐ Le vecteur $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in V$.

Question 6
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

1) Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible.

   ☐ Vrai ☐ Faux

2) Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible.

   ☐ Faux ☐ Vrai

3) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

   ☐ Vrai ☐ Faux

4) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.

   ☐ Faux ☐ Vrai

5) Si $\vec{x}$ est une solution non nulle de $A\vec{x} = \vec{0}$, alors aucune composante de $\vec{x}$ est nulle.

   ☐ Faux ☐ Vrai

6) Si A est une matrice $m \times n$ et $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ sont tels que $A\vec{v} = \vec{0} = A\vec{w}$, alors $A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \vec{0}$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   ☐ Faux ☐ Vrai

7) Soit A une matrice $m \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble des solutions du système $A\vec{x} = \vec{b}$. Alors le système est homogène si et seulement si $\vec{0} \in S$.

   ☐ Vrai ☐ Faux

Question 7 Soit $V = \text{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ avec

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v_4} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Laquelle des informations suivantes est correcte?

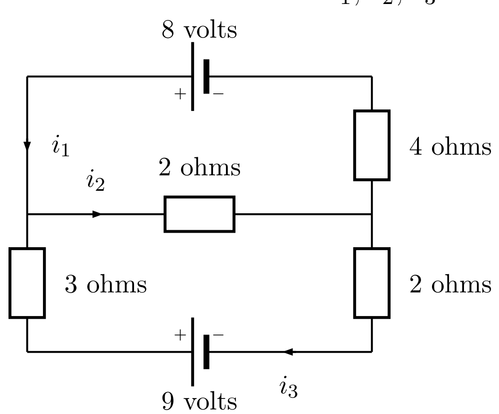
- ☐ V contient seulement v_1, v_2, v_3, v_4.
- ☐ Le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ n'appartient pas à V.
- ☐ V contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le vecteur nul n'appartient pas à V.

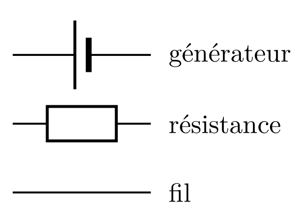
Question 8 <u>Les deux lois de Kirchhoff</u>

1. À chaque nœud (embranchement) d'un circuit électrique, la somme des courants (intensités) qui entrent dans le nœud est égale à la somme des courants qui en sortent.

2. La somme des tensions (différences de potentiels) le long de tout circuit fermé est nulle (l'augmentation du potentiel est comptée avec $+$ et la diminution avec $-$).

On rappelle que la chute de potentiel U dans une résistance R traversée par un courant d'intensité I est donnée par la loi d'Ohm $U = RI$.
Déterminer les intensités i_1, i_2, i_3 dans le circuit suivant.





Question 9
Les équations en chimie traduisent les quantités de substances absorbées et produites au cours d'une réaction chimique. Lors de la combustion du méthane CH_4 par exemple, le méthane CH_4 réagit avec l'oxygène O_2 pour former du dioxyde de carbone CO_2 et de l'eau H_2O selon

$$\alpha_1 CH_4 + \alpha_2 O_2 \longrightarrow \alpha_3 CO_2 + \alpha_4 H_2O. \tag{$*$}$$

"Pondérer" cette équation signifie trouver des nombres entiers strictement positifs α_1, α_2, α_3, α_4 tels que le nombre total d'atomes de carbone (C), d'hydrogène (H) et d'oxygène (O) du membre de gauche et de droite soit égal (conservation de la matière).
Question: Pondérer l'équation ($*$).
Note: Les chimistes préfèrent les plus petits entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ qui "réalisent" la pondération.
Pour cela, considérer pour chaque molécule de la réaction le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{nombre d'atomes de carbone} \\ \text{nombre d'atomes d'hydrogène} \\ \text{nombre d'atomes d'oxygène} \end{pmatrix}$$

et écrire le système linéaire associé sous la forme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

puis résoudre le système.