Série 1

Mots-clés: Systèmes linéaires, matrices associées, opérations élémentaires, colonnes-pivots, algorithme de Gauss-Jordan

Question 1
Sur une balance à deux plateaux on place des billes, des cubes et des pyramides (tous les objets d'une même forme ont le même poids). La balance est équilibrée quand il y a 7 billes à gauche et 6 cubes et 2 pyramides à droite ainsi qu'avec 4 pyramides à gauche et 1 cube et 1 bille à droite.

i) Écrire un système linéaire qui traduit ces informations et le résoudre.

ii) Si l'on connaît le poids de l'un de ces objets peut-on en déduire le poids des deux autres?

Question 2 Trouvez tous les nombres de 3 chiffres qui augmentent de 270 quand on intervertit les deux premiers chiffres à gauche et qui diminuent de 99 quand on intervertit l'ordre des chiffres extrêmes.

Question 3
Considérons le système linéaire à 3 équations et 2 inconnues

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 &= 1 \end{cases}$$

i) Est-ce que le système est compatible?

ii) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Question 4
En considérant les variables dans l'ordre x, y, u, v, w, quelle est la matrice augmentée du système ci-contre? $\begin{cases} w + 2x - y &= 4 \\ -y + x &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x &= 7 \end{cases}$

- ☐ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$
- ☐ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right)$
- ☐ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right)$
- ☐ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right)$

Question 5
A l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan, résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} w + 2x - y &= 4 \\ -y + x &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x &= 7 \end{cases}$$

Question 6
Soit $a \in \mathbb{R}$. À l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan, déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z &= a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z &= a - a^2 \\ x + y + z &= 1 - a \end{cases}$$

a) n'admet aucune solution,

b) admet une infinité de solutions,

c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas b) et c).

Question 7
Laquelle des colonnes de la matrice suivante *n'est pas* une colonne-pivot?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- ☐ la quatrième
- ☐ la première
- ☐ la troisième
- ☐ la deuxième

Question 8 Le système linéaire suivant où a est un paramètre réel

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 1 \\ 2y + 2z &= 1 - 2a \\ 2x + 4ay + 2z &= 1 \\ 4x + 4ay + 2z &= 1 + 2a \end{cases}$$

- ☐ ne possède aucune solution lorsque $a \neq \frac{1}{2}$
- ☐ possède une infinité de solutions lorsque $a = \frac{1}{2}$
- ☐ ne possède aucune solution lorsque $a = \frac{1}{2}$
- ☐ possède une solution unique lorsque $a = \frac{1}{2}$

Question 9

1) Un système linéaire peut avoir exactement 12197 solutions.

- [ ] Faux
- [ ] Vrai

2) Deux systèmes linéaires qui ont les mêmes ensembles de solutions ont des matrices associées qui sont égales.

- [ ] Faux
- [ ] Vrai

3) Une matrice échelonnée et réduite de taille 4×5 possède 4 colonnes-pivots.

- [ ] Vrai
- [ ] Faux

4) Une matrice de taille 9×18 possède au maximum 9 colonnes-pivots.

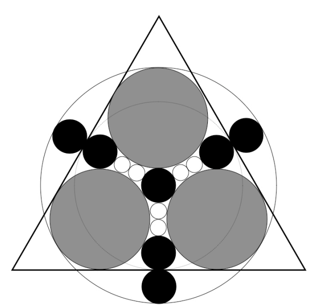
- [ ] Vrai
- [ ] Faux

5) Si un système de m équations à n inconnues possède exactement 2 solutions, alors

- [ ] aucune équation du système n'est linéaire
- [ ] au moins une des m équations n'est pas linéaire.

Question 10 [Tanabe Shigetoshi, 1865]

On considère un triangle équilatéral de côté a et on suppose que des cercles sont agencés comme sur la figure ci-contre (6 cercles blancs, 3 gris et 7 noirs). Exprimer les rayons des cercles gris, noirs et blancs en fonction de a.



Indication. On note r le rayon du cercle *inscrit* au triangle, g, n, b les rayons des cercles gris, noirs, blancs respectivement. Écrire r en fonction de g, n, b de 3 façons possibles. À la fin utiliser le fait que $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.
Astuce: Il y a un hexagone régulier caché dans cette figure