Série 6

Cette série suit les chapitres 1, 2 et 3 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *inverse, matrice, déterminant*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1 (Algorithme de Gauss-Jordan)

A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} w + 2x - y &= 4 \\ -y + x &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x &= 7 \end{cases}$$

Exercice 2 (Injective, surjective)

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

a) Montrer que si T est surjective, alors T est aussi injective.

b) Montrer que si T est injective, alors T est aussi surjective.

Exercice 3 (Inverse)

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles (essayer d'utiliser le moins de calculs possible, justifier votre réponse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 14 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Inverse)

Calculer l'inverse des matrices ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (Matrices élémentaires)

On considère les matrices élémentaires de taille 4×4.

a) Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.
b) Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.
c) Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.
d) Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a), b) et c).

Exercice 6 (Matrices symétriques et anti-symétriques)

1. Trouver toutes les matrices symétriques de taille 2×2. Trouver toutes les matrices anti-symétriques de taille 2×2.
2. Soit A une matrice anti-symétrique de taille $n \times n$. Montrer que
   i) pour toute matrice B de taille $n \times n$ anti-symétrique, $A + B$ est anti-symétrique ;
   ii) si A est inversible, alors A^{-1} est anti-symétrique.
3. Soit M une matrice de taille $n \times n$. Montrer que M admet une décomposition sous la forme $M = S + A$, où S est une matrice symétrique et A une matrice anti-symétrique. Indication : on pourra considérer les matrices $M + M^T$ et $M - M^T$.
4. Calculer la décomposition en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique, des matrices M de taille 3×3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 (Produit matriciel : cas particulier)

Montrer qu'un produit de matrices $n \times n$ triangulaires inférieures est triangulaire inférieur.

Exercice 8 (Produit matriciel : cas particulier)

Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $A^2 = B^2 = 0$. Montrer qu'en général $(A+B)(A-B) \neq 0$.

Est-ce qu'il y a des cas où l'égalité peut être vraie ?

Exercice 9 (Inverse)

Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les matrices suivantes sont inversibles. Ensuite, donner l'inverse de la matrice considérée pour ces valeurs de λ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 10 (Produit de matrices singulières et inversibles)

1. Soient A, B deux matrices $n \times n$. Prouver les affirmations suivates ou trouver un contre-exemple
   a) A ou B sigulière $\Rightarrow$ AB singulière
   b) AB inversible $\Rightarrow$ A, B inversibles
2. Soient A, B deux matrices. Prouver ou trouver un contre-exemple
$$AB \text{ inversible} \Rightarrow A,\ B \text{ inversibles}$$

Exercice 11 (Inverse et équation matricielle)

Soit
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer C^2 et montrer que C^3 est la matrice nulle. On dit que C est *nilpotente* (lorsque $C^k = 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.)
2. Montrer sans faire de calculs explicites que $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.
3. Trouver l'inverse (explicite cette fois !) de la matrice $I - C$.
4. Soit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trouver les solutions de l'équation $\vec{x} = C\vec{x} + \vec{b}$ en échelonnant la matrice augmentée $(I - C \mid \vec{b})$.
5. Résoudre la même équation que ci-dessus en utilisant la formule $\vec{x} = (I - C)^{-1}\vec{b}$.

Exercice 12 (Preuve)

Démontrer ce théorème.

Soit A une matrice $n \times n$. Alors s'il existe une matrice C de taille $n \times n$ telle que $AC = I_n$ ou $CA = I_n$ alors A est inversible d'inverse C.

Exercice 13 (Déterminants)

Calculer le déterminant des matrices suivantes de deux manières différentes. D'abord en utilisant le développement selon la première colonne. Puis en développant selon une colonne ou une ligne bien choisie pour minimiser le nombre de calculs.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 (QCM : Produit matriciel)

a) Les matrices sont de taille $n \times n$.

- ☐ Soient A, B deux matrices telles que A ou B n'est pas inversible. Alors AB n'est pas inversible.
- ☐ Il existe une matrice A inversible et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible.
- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors $A + B$ est inversible.
- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

b) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- ☐ Alors $(AB)^T = A^T B^T$.
- ☐ Alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si A est inversible.
- ☐ Si $m = n$ et $A = A^T$, alors A est diagonale.
- ☐ Si $m = n = p$, $A = A^T$ et $B = B^T$, alors $(AB)^T = AB$.

c) ☐ Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est diagonale.

☐ Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est scalaire, i.e. $C = \lambda I$, où I est la matrice identité et $\lambda \in \mathbb{R}$.

☐ Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est diagonale ou C est diagonale.

☐ Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est scalaire ou C est scalaire.

d) Soit A une matrice de taille 7×8 et T l'application linéaire définie par $T\overrightarrow{x} = A \cdot \overrightarrow{x}$. Alors $\overrightarrow{x}$ est un vecteur de

☐ $\mathbb{R}^7$

☐ $\mathbb{R}^8$

☐ $\mathbb{R}^{15}$

☐ $\mathbb{R}^{56}$

e) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

☐ Alors BA est une matrice $n \times n$.

☐ Alors A^T est une matrice $m \times n$.

☐ Alors A représente une application linéaire $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

☐ Alors $(AB)^T$ est une matrice $p \times m$.

f) Soient A, B, C trois matrices $n \times n$.

☐ Si $AC = BC$, alors $A = B$.

☐ Si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.

☐ Si $C = C^{-1}$ et $AC = BC$, alors $A = B$.

☐ Si $C = C^T$ et $AC = BC$, alors $A = B$.

g) Soit A une matrice carrée et a un nombre réel. Alors

☐ $A + I$ est inversible.

☐ $(A - I)(A + I) = A^2 - I$.

☐ $(A + I)(A + I) = A^2 + I$.

☐ $(aA)^2 = a(A^2)$.

Exercice 15 (QCM : Indépendance linéaire)

Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si

☐ $b=1$ ☐ $b=2$ ☐ $b=3$ ☐ $b=4$

Exercice 16 (QCM : Pivots)

Laquelle des colonnes de la matrice suivante n'est pas une colonne-pivot ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- ☐ la première,
- ☐ la deuxième,
- ☐ la troisième,
- ☐ la quatrième.