Série 3

Cette série suit le chapitre 1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *Gauss-Jordan, formes E et ER, combinaisons linéaires, span,* $\mathbb{R}^n$*, (in)dépendance linéaire*

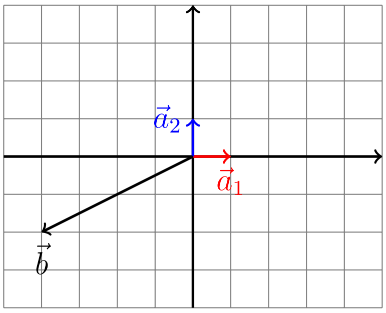
Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

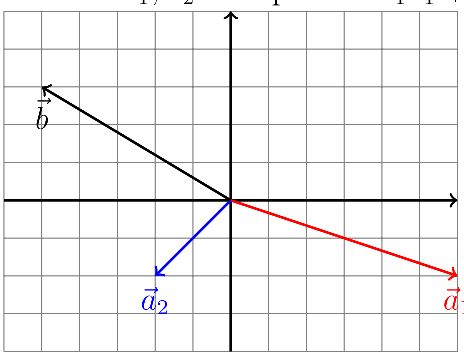
Exercice 1 (Combinaisons linéaires)

À l'aide des graphes ci-dessous, trouver les coefficients des combinaisons linéaires demandées. Il se peut qu'il existe plusieurs solutions, ou aucune solution. Dans les graphes ci-dessous, un carré =1 unité.

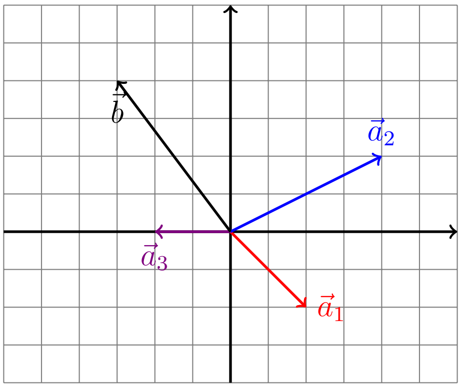
a) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$



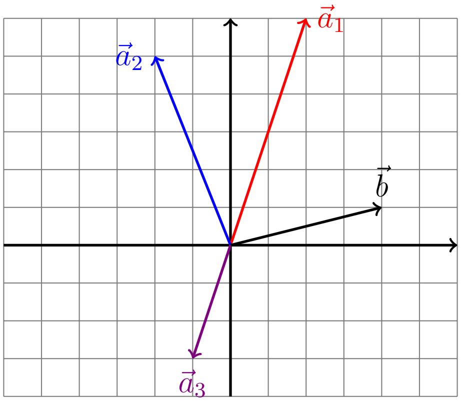
b) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$



c) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$



d) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$. Peut-on trouver μ_1 et μ_3 tels que $\vec{b} = \mu_1\vec{a}_1 + \mu_3\vec{a}_3$?



Exercice 2 (Combinaison linéaire)

a) Soient les vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}.$$

i) Pour quelle(s) valeur(s) de h le vecteur $\overrightarrow{w}$ peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$?

ii) Dans ce cas quels sont les coefficients respectifs a_1, a_2 des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$?

b) Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Justifiez votre réponse.

Exercice 3 (Combinaisons linéaires et solutions)

Considérons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & + & 9x_3 & = & -6. \end{array}\right.$$

a) Écrire le système sous forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$.

b) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

c) Trouver la solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$.

d) Subsidiaire : écrire l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre.

Exercice 4 (Combinaisons linéaires)

Considérons les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le vecteur $\vec{b}$ est-il une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$?

Exercice 5 (Span)

Soient $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner une interprétation géométrique de $\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$.

b) Est-ce que $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est dans le $\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$?

Exercice 6 (Produit matrices-vecteurs)

Calculer $A(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

Exercice 7 ((In)dépendance linéaire)

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

a) A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.

b) A est une matrice 4×2, $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2)$ et $\vec{a}_2$ n'est pas un multiple de $\vec{a}_1$.

c) A est une matrice 4×3, $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3)$. Les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement indépendants, et $\vec{a}_3$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$.

Exercice 8 ((In)dépendance linéaire)

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (Preuve : (In)dépendance linéaire)

L'assertion suivante est-elle correcte (justifier) ?

Tout ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant si $p > n$.

Exercice 10 (Solution)

Soit $a \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'algorithme de réduction (ou de Gauss-Jordan), déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z & = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z & = a - a^2 \\ x + y + z & = 1 - a \end{cases}$$

a) n'admet aucune solution,

b) admet une infinité de solutions,

c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas b) et c).

Exercice 11 (Algorithme de Gauss-Jordan et solutions)

Écrire les solutions des systèmes $A\vec{x} = \vec{b}$ suivants sous la forme $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}$, où $\vec{p}$ est une solution particulière du système, et $\vec{v}$ est la solution générale du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & + & 9x_3 & = & -6 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 12 (Vrai - faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) En appliquant différentes opérations (licites) sur les lignes d'une matrice, on obtient des formes échelonnées réduites différentes.	☐	☐
b) Une variable de base d'un système linéaire est une variable qui correspond à un pivot dans une colonne.	☐	☐
c) La dernière colonne d'une matrice augmentée peut faire office de colonne pivot.	☐	☐
d) Un système n'est compatible que lorsque chaque colonne contient un pivot.	☐	☐

Exercice 13 (QCM)

Soit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$$

- ☐ L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h = -2$.
- ☐ Le vecteur $\mathbf{v}_2$ dépend linéairement des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_3$ pour $h \neq 2$.
- ☐ L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h \neq -2$.
- ☐ Le vecteur $\mathbf{v}_3$ dépend linéairement des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ pour $h = 2$.

Exercice 14 (QCM)

Soit $\text{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ avec

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

- ☐ Le Vect ne contient aucun vecteur de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le Vect contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est dans le Vect.
- ☐ Le Vect contient une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.