Série 10

Cette série suit les chapitres 4 et 5 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *changements de base, vecteurs propres, polynômes caractéristiques*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1 (Changement de base)

Dans $\mathbb{P}_2$, calculer la matrice de changement de base de la base

$$\mathcal{B} = (1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2)$$

vers la base canonique $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$. Puis écrire les coordonnées du vecteur $p = -1 + 2t$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 (Matrice d'une application)

Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice $[T]_\mathcal{B}$ de T dans la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

On s'aidera des matrices $[T]_\mathcal{E}$, $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$, et $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$.

Exercice 3 (Valeurs et vecteurs propres)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Est-ce que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A ?

b) Même question avec $\lambda = 1$ et $\lambda = -9$.

Exercice 4 (Polynôme caracteristique)

Soient

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$

et $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune de ces matrices A, B, C, D, E.

Exercice 5 (Preuve)

Soit $A \in M_{n\times n}$ admettant une valeur propre λ associée au vecteur propre $\vec{v}$.

a) Trouver une valeur propre (et son vecteur propre associé) de la matrice $B = cA$.

b) Pour $k \geq 2$, trouver une valeur propre (et son vecteur propre associé) de A^k.

Exercice 6 (Valeurs et espaces propres)

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que 0 et 6 sont des valeurs propres de A et calculer les espaces propres associés.

Exercice 7 (Valeurs propres)

Soit A la matrice 2×2 réelle donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\lambda = a \pm ib$ sont les valeurs propres de A.

Exercice 8 (Valeurs et espaces propres)

Calculer pour les matrices suivantes les valeurs propres et une base de chaque espace propre dans $\mathbb{C}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (Théorème du rang)

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer que $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution pour tout $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si $A^T\vec{y} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale $\vec{y} = \vec{0}$.

Indication : Utiliser le théorème du rang.

Exercice 10 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V. Alors on a aussi que V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel.	☐	☐
b) Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V.	☐	☐
c) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$.	☐	☐
d) Le noyau d'une matrice A n'est pas nécessairement un espace vectoriel.	☐	☐

Exercice 11 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) La matrice A n'est pas inversible si et seulement si 0 est une valeur propre de A.	☐	☐
b) Une matrice A carrée est inversible si et seulement si elle est diagonalisable.	☐	☐
c) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont sur sa diagonale.	☐	☐
d) On trouve les valeurs propres de A en réduisant la matrice à sa forme échelonnée.	☐	☐

Exercice 12 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres.	☐	☐
b) Pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable il faut qu'elle ait au moins n valeurs propres distinctes.	☐	☐
c) Si v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres linéairement indépendants, alors leur valeurs propres associées sont différentes.	☐	☐
d) Soient A, B et C trois matrices. Si A et B sont semblables, et si B et C sont semblables, alors A et C sont semblables.	☐	☐

Exercice 13 (QCM)

Soit $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels.

1. Soit $V = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid M \text{soit inversible}\}$. Alors
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}$
   - ☐ V est un espace vectoriel.
   - ☐ V n'est pas un espace vectoriel.
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices inversibles.
2. Soit $E = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. Alors
   - ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$
   - ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$
   - ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$
   - ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$
3. Quelle famille ci-dessous est une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   - ☐ $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$
   - ☐ $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$
   - ☐ $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$
   - ☐ $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$