Série 9

Mots-clés: Bases, coordonnées selon une base, changements de bases

Rappel. Soit V, W deux espaces vectoriels et une application linéaire $T : V \longrightarrow W$.

- **L'image** de T est l'ensemble

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\vec{v}) \text{ avec } v \in V\} \subset W$$

- **Le noyau** de T est l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{v} \in V \text{ tels que } T(\vec{v}) = 0_W\} \subset V$$

Question 1 Démontrer les proposition suivantes :

a) $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W

b) $\mathrm{Ker}(T)$ est un sous-espace vectoriel de V

Question 2 Trouver une base pour le noyau et l'images des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 3

a) Les polynômes de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?

(i) $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$

(ii) $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$,

b) Les polynômes p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de $\mathbb{P}_3$? Si oui, monter qu'ils forment une famille génératrice. Si non, compléter avec un ou plusieurs polynôme de sorte à obtenir une base.

Question 4 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et une famille $\mathcal{F} = \{p, q, r, s\}$ consituée des quatre polynômes

$$p(t) = t^2 + t + 1,\ q(t) = t^2 + 2t + a,\ r(t) = t^3 + b,\ s(t) = t + c.$$

Alors

- ☐ $\mathcal{F}$ est liée lorsque $a + c - 1 \neq 0$
- ☐ $\mathcal{F}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c
- ☐ $\mathcal{F}$ est toujours liée
- ☐ $\mathcal{F}$ forme une base de $\mathbb{P}_4$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c

Question 5 Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application "trace" définie par

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d.$$

Parmi les familles de matrices suivantes, laquelle forme une base de Ker(Tr)?

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Question 6

a) Soit $W = \mathrm{Span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ où $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Trouver $\dim(W)$.

b) Trouver un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ tel que $\mathcal{B}$ soit une base de W.

c) Completer l'ensemble $\{\vec{v_1} + \vec{v_2}\} \subset W$ pour obtenir une base de W.

Rappel. Soit V un espace vectoriel, et des bases $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots \vec{b}_n\}$ et $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1 \ldots \vec{c}_n\}$ de V.

- **Les coordonnées** de $\vec{v} \in V$ dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients de l'unique combinaison linéaire de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$, c'est à dire

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{b}_n.$$

- **La matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$** est définie par

$$P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} [\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} & \dots & [\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} (= [\mathcal{B}]_{\mathcal{C}})$$

et satisfait la formule de changements de base

$$[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{CB}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Question 7 Exprimer les coordonnées des vecteurs $\vec{v}$ par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et écrire la matrice de changement de base $P_{\mathcal{CB}}$.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Question 8 Soient les bases de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}, \quad \mathcal{D} = \{\vec{d}_1, \vec{d}_2\},$$

avec $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$ linéairement indépendants et $\vec{d}_1 = \vec{6}c_1 - 2\vec{c}_2$ et $\vec{d}_2 = 9\vec{c}_1 - 4\vec{c}_2$.

a) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{CD}}$ de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{C}$.

b) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{DC}}$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$.

c) Pour $\vec{x} = -3\vec{c}_1 + 2\vec{c}_2$, calculer $[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$ et $[\vec{x}]_{\mathcal{D}}$.

Question 9 Soit $p(t) = 2t^2 + t - 3$ et $\mathcal{B} = \{1 + t, t + t^2, -2 + t + t^2\}$ une base de $\mathbb{P}_2$. Calculer $[p(t)]_{\mathcal{B}}$.

Question 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ une base de $M_{2\times 2}$. Calculer $[A]_{\mathcal{B}}$.

Question 11

a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Question 12 Répondre aux questions suivantes :

a) Combien de pivots une matrice 7×5 doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

b) Combien de pivots une matrice 5×7 doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

c) Combien de pivots une matrice 5×7 doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent $\mathbb{R}^5$?

d) Combien de pivots une matrice 5×7 doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent $\mathbb{R}^7$?

Question 13 Soient V et W deux espaces vectoriels, $T : V \to W$ une transformation linéaire et $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ un sous-ensemble de V. Démontrer les affirmations suivantes

a) Si $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ est linéairement dépendant (lié) alors $\{T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_k)\}$ est aussi linéairement dépendant (lié).

b) Si T est injective et $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ est linéairement indépendant (libre) alors l'ensemble $\{T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_k)\}$ est aussi linéairement indépendant (libre).