EPFL – Automne 2024	D. Strütt
Analyse I – SV	**Exercices**
Série 2	19 septembre 2024

Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.

📖 **Théorie nécessaire:** Cours 0.8-0.10

Soient les ensembles $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$, $Z = \{5, 6\}$.

1. Est-ce que le couple $(3, 2)$ est un élément du produit cartésien $X \times Y$?
2. Montrer que le produit cartésien n'est pas associatif, c'est-à-dire que $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$.

Exercice 2.

Objectif: Se familiariser avec la grammaire mathématique
📖 **Théorie nécessaire:** Slides cours d'introduction

Pour les paires d'énoncés ci-dessous, comprendre la différence entre les deux et déterminer si ils sont vrais ou faux

(i)

énoncé 1 :Pour chaque pomme, il existe un arbre tel que la pomme a poussé sur cet arbre
énoncé 2 :Il existe un arbre tel que pour chaque pomme, la pomme a poussé sur cet arbre

(ii)

énoncé 1 :Pour chaque étudiant · e de l'EPFL, il existe un numéro à 6 chiffres tel que ce numéro est le numéro SCIPER de l'étudiant · e
énoncé 2 :Il existe un numéro à 6 chiffres tel que pour chaque étudiant · e de l'EPFL, ce numéro est le numéro SCIPER de l'étudiant · e

(iii)

énoncé 1 :Pour chaque sommet des Alpes, il existe un sommet dans l'Himalya qui est plus haut
énoncé 2 :Il existe un sommet dans l'Himalaya qui est plus haut que chaque sommet des Alpes

(iv)

énoncé 1 :Pour chaque point à la surface de la planète A, il existe un point B qui est pile à l'antipode.
énoncé 2 :Il existe un point B à la surface de la planette tel que chaque point à la surface de la planète A à pile à l'antipode de B.

(v)

énoncé 1 :Pour chaque anneau de puissance que Sauron a donné aux humains,
il existe un anneau pour les gouverner tous.

énoncé 2 :Il existe un anneau tel que chaque anneau de puissance que Sauron
a donné aux humains est gouverné par cet anneau.

Des sources sur le sujet :

en anglais : https://youtu.be/qj139dE7tFI?si=WMnIBVQ-mL9Hhcer&t=37

en français : https://youtu.be/5tddNO6YVZU?si=xbMGNMihC5kc7P-Z

Exercice 3.

Objectif: Opérations sur les ensembles
Théorie nécessaire: Cours 0.6-0.9

Soient $A, B, C \subset \mathbb{R}$ des ensembles non vides.
On note $A \setminus B$ pour la différence des ensembles A et B, et $A \cap B$ pour leur intersetion, c.-à-d.

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} \qquad \text{et} \qquad A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Vrai ou faux ?

Q1 : $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$

Q2 : Soient $A, B \neq \emptyset$. $A \times B = B \times A \quad \Leftrightarrow \quad A = B$

Q3 : $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Exercice 4.

Pour des détails supplémentaires, voir Annexe A du polycopié.
Une “proposition (logique)” est un énoncé qui peut être vrai ou faux (mais pas les deux à la fois). Soit p et q des propositions. Par les tableaux de vérité suivants, on introduit les opérations non (“non” logique), et (“et” logique), ou (“ou” logique), $\Leftrightarrow$ (l'équivalence logique) et $\Rightarrow$ (l'implication logique), où $V :=$ vrai, et $F :=$ faux.

p	non p
V	F
F	V

p	q	p et q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	p ou q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(i) (Équivalences logiques)

Soient p, q et r des propositions. Montrer que :

(a) (non (non p)) $\Leftrightarrow p$ (loi de la double négation).

(b) (p et p) $\Leftrightarrow p$,
(p ou p) $\Leftrightarrow p$ (idempotence).

(c) (p et q) $\Leftrightarrow$ (q et p),
(p ou q) $\Leftrightarrow$ (q ou p) (commutativité).

(d) (non (p et q)) $\Leftrightarrow$ ((non p) ou (non q)),
(non (p ou q)) $\Leftrightarrow$ ((non p) et (non q)) (lois de DE MORGAN).

(e) ((p et q) et r) $\Leftrightarrow$ (p et (q et r)),
((p ou q) ou r) $\Leftrightarrow$ (p ou (q ou r)) (associativité).

(f) $((p \,\mathrm{et}\, q) \,\mathrm{ou}\, r) \Leftrightarrow ((p \,\mathrm{ou}\, r)$ et $(q \,\mathrm{ou}\, r))$,
$((p \,\mathrm{ou}\, q) \,\mathrm{et}\, r) \Leftrightarrow ((p \,\mathrm{et}\, r)$ ou $(q \,\mathrm{et}\, r))$ (distributivité).

(g) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\mathrm{non}\, p) \,\mathrm{ou}\, q)$ (définition de l'implication).

(h) $(\mathrm{non}\ (p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p\,\mathrm{et}\ (\mathrm{non}\, q))$ (négation de l'implication).

(i) $((p \Rightarrow q)\,\mathrm{et}\ (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (transitivité de l'implication).

(j) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q)\,\mathrm{et}\ (q \Rightarrow p))$ (propositions équivalentes).

(k) $((\mathrm{non}\, q) \Rightarrow (\mathrm{non}\, p)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ (contraposé de l'implication).

A noter que la véracité de la réciproque de la proposition $p \Rightarrow q$ c'est-à-dire la proposition $q \Rightarrow p$ n'a aucun rapport avec la véracité de la proposition $p \Rightarrow q$.

Dans la suite, pour économiser des parenthèses, nous utiliserons les priorités habituelles sur les opérations et, si convenable, nous écrirons que $p \Leftarrow q$ au lieu de $q \Rightarrow p$.

(ii) (Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, une variable)

Soit E un ensemble et pour $x \in E$ soit $p(x)$ et $q(x)$ des propositions (dont les valeurs de vérité peuvent dépendre de x). On écrira $\forall x \in E$, $p(x)$ pour dire que “pour tous les éléments $x \in E$, la proposition $p(x)$ est vraie”, et $\exists x \in E : p(x)$ pour dire que “il existe $x \in E$ tel que la proposition $p(x)$ est vraie”. Se convaincre que (il ne s'agit pas de le montrer) :

(a) $(\mathrm{non}\ (\forall x \in E, p(x))) \Leftrightarrow (\exists x \in E : \mathrm{non}\ (p(x)))$.

(b) $(\mathrm{non}\ (\exists x \in E : p(x))) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \mathrm{non}\ (p(x)))$.

(c) $(\forall x \in E, p(x) \,\mathrm{et}\, q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E, p(x))\,\mathrm{et}\ (\forall x \in E, q(x)))$.

(d) $(\exists x \in E : p(x) \,\mathrm{ou}\, q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E : p(x))\,\mathrm{ou}\ (\exists x \in E : q(x)))$.

(e) $(\forall x \in E, p(x) \,\mathrm{ou}\, q(x)) \Leftarrow ((\forall x \in E, p(x))\,\mathrm{ou}\ (\forall x \in E, q(x)))$.

(f) $(\exists x \in E : p(x) \,\mathrm{et}\, q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in E : p(x))\,\mathrm{et}\ (\exists x \in E : q(x)))$.

Pour les deux cas où il n'y a pas équivalence, trouver un contre-exemple à la proposition réciproque.

(iii) (Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, deux variables)

Soit E et F des ensembles et pour $x \in E$ et $y \in F$ soit $p(x, y)$ des propositions (dont les valeurs de vérité peuvent dépendre de x et de y). Se convaincre que (il ne s'agit pas de le montrer) :

(a) $((\forall x \in E), (\forall y \in F), p(x, y)) \Leftrightarrow ((\forall y \in F), (\forall x \in E), p(x, y))$.

(b) $((\exists x \in E) : (\exists y \in F) : p(x, y)) \Leftrightarrow ((\exists y \in F) : (\exists x \in E) : p(x, y))$.

(c) $((\exists x \in E) : (\forall y \in F), p(x, y)) \Rightarrow ((\forall y \in F), (\exists x \in E) : p(x, y))$.

Pour le cas où il n'y a pas équivalence, trouver un contre-exemple à la proposition réciproque.

Exercice 5.

Objectif: Négation d'énoncés avec quantificateurs
Théorie nécessaire: Régles de calcul de la négation données au cours, Remarque A.6 du polycopié

On rappelle que la négation logique d'un énoncé P est l'unique autre énoncé noté $\neg P$ tel que soit P soit $\neg P$ est vrai, mais jamais les deux.
Pour les énoncés suivants, les réécrire en utilisant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, puis donner la négation de ces énoncés.

Remarques :

- *Nous ne prétendons pas que ces énoncés sont vrais ou faux.*
- *Il existe généralement plusieurs façons de réécrire ces phrases ; le but est plus de vous faire réfléchir sur la négation que de trouver <u>la</u> bonne réponse.*

Les énoncés :

— Les ours polaires sont tous gauchers.

— Les films hollywoodiens sont tous de bonne qualité.

— Tous les chats sont mignons et gentils.

— Il y a un pays où on ne parle pas le français.

— Il y a une ville où toutes les lignes de transports publiques sont gratuites.

— Il existe une personne qui est célèbre et heureuse.

— Il existe un nombre réel r tel que quel que soit la fonction réelle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $f(r) \neq 0$

Exercice 6.

Objectif: Opérations sur les ensembles, démonstrations
Théorie nécessaire: Exercices précédents et cours 0.6-0.8

Soit X un ensemble et $A \subseteq X$. Notons $A^c = \{x \in X \,:\, x \notin A\}$ le *complémentaire de A dans X*.

(i) Donner $\emptyset^c$ et X^c.

(ii) Montrer que $(A^c)^c = A$ pour toute partie $A \subseteq X$.

(iii) Montrer que $X = A \cup A^c$ et que $A \cap A^c = \emptyset$ pour tout $A \subseteq X$.

(iv) Montrer que si $A \subseteq B \subseteq X$ alors $B^c \subseteq A^c$.

(v) Montrer que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ et que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ pour toutes parties $A, B \subseteq X$.

Indication : Pour montrer une égalité entre deux ensembles non-vides, procéder par double inclusion. Pour montrer qu'un ensemble est vide procéder par l'absurde : supposer que l'ensemble est non vide, considérer un élément de cet ensemble et arriver à une contradiction.

Annexe

Tous les propositions de l'**Exercice 5** ***(i)*** se peuvent montrer par la construction des tableaux de vérité à partir des tableaux de vérité des définitions. Voici des tableaux de verité à remplir.

(a)

p	non p	non (non p)

(b)

p	p	p et p

et

p	p	p ou p

(c)

p	q	p et q	q et p

et

p	q	p ou q	q ou p

(d)

p	q	p et q	non (p et q)	non p	non q	(non p) ou (non q)

p	q	p ou q	non (p ou q)	non p	non q	(non p) et (non q)

(e)

p	q	r	p et q	(p et q) et r	q et r	p et (q et r)

p	q	r	p ou q	(p ou q) ou r	q ou r	p ou (q ou r)

(f)

p	q	$p \,\mathrm{et}\, q$	r	$(p \,\mathrm{et}\, q) \,\mathrm{ou}\, r$	$p \,\mathrm{ou}\, r$	$q \,\mathrm{ou}\, r$	$(p \,\mathrm{ou}\, r)$ et $(q \,\mathrm{ou}\, r)$

p	q	$p \,\mathrm{ou}\, q$	r	$(p \,\mathrm{ou}\, q) \,\mathrm{et}\, r$	$p \,\mathrm{et}\, r$	$q \,\mathrm{et}\, r$	$(p \,\mathrm{et}\, r)$ ou $(q \,\mathrm{et}\, r)$

(g)

p	q	$p \Rightarrow q$	non p	(non p) ou q

(h)

p	q	$p \Rightarrow q$	non $(p \Rightarrow q)$	non q	p et (non q)

(i)

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

(j)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow p)$

(k)

p	q	non q	non p	$p \Rightarrow q$	(non q) $\Rightarrow$ (non p)