EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
5 décembre 2025

Analyse I – Série 12

Exercice 1. (Séries de Mac-Laurin)

Objectif: Trouver les séries de Mac-Laurin des fonctions données
Théorie nécessaire: Propriété et exemples des séries de Taylor et Mac-Laurin données aux cours 21, 22, 23
(1) Vérifier que les fonctions suivantes sont indéfiniment dérivables sur leur domaine de définition.
(2) Trouver la n-ième dérivée de chaque fonction.
(3) Trouver la série de Mac-Laurin et le rayon de convergence de chaque fonction.

i) $f(x) = \sin(x)$ *ii)* $f(x) = \cos(x)$ *iii)* $f(x) = e^x$

iv) $f(x) = e^{-x}$ *v)* $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ *vi)* $f(x) = \mathrm{ch}(x)$

vii) $f(x) = \ln(1 + x)$ *viii)* $f(x) = \ln(1 - x)$ *ix)* $f(x) = (1 + x)^m,\ m \in \mathbb{R}$

Exercice 2. (Dérivées)

Objectif: Vérifier les identités données en utilisant les séries de Mac-Laurin
Théorie nécessaire: Propriété des séries entières données au cours 23
Vérifier les identités suivantes à l'aide des séries de Mac-Laurin :

i) $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$ *ii)* $\dfrac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$

iii) $\dfrac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$ *iv)* $\dfrac{d}{dx}\ln(1 + x) = \dfrac{1}{1 + x}, \quad -1 < x < 1.$

Exercice 3. (Développements limités)

Objectif: Trouver les DL avec le reste des fonctions données
Théorie nécessaire: Méthodes et exemples proposées aux cours 21, 22
Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f autour de $a = 0$ et donner le reste $R_3(x)$.

i) $f(x) = \sin(3x)$ *ii)* $f(x) = \ln(2 + x)$ *iii)* $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

Exercice 4. (Composées, produits et sommes de développements limités)

Objectif: Trouver les DL des fonctions données
Théorie nécessaire: Opérations algébriques sur les DL et exemples données au cours 22
Trouver le développement limité d'ordre n autour de $a = 0$ de

i) $f(x) = \ln(\cos(x)), \quad n = 4$ *ii)* $f(x) = \exp(\sin(x)), \quad n = 4$

iii) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}, \quad n = 4$ *iv)* $f(x) = \dfrac{3}{(1 - x)(1 + 2x)}, \quad n = 4$

v) $f(x) = e^{x^2}, \quad n \in \mathbb{N}$ *vi)* $f(x) = \ln\left(1 + x - 2x^2\right), \quad n = 4$

vii) $f(x) = \dfrac{x}{9 + x^2}, \quad n \in \mathbb{N}$

Astuce: Dans *iv)*, décomposer la fonction en somme de deux fractions simples.

Exercice 5. (Séries entières)
Objectif: Trouver la série entière de la fonction donnée
Théorie nécessaire: Propriété et exemples des séries entières données aux cours 22, 23
Déterminer le développement en série entière de la fonction $f(x) = \dfrac{2}{3+4x}$ autour de a et déterminer l'intervalle de convergence pour

i) $a = 0$ *ii)* $a = 2$

Exercice 6. (Séries de Taylor)

Objectif: Trouver les série de Taylor des fonction donnée et leurs domains de convergence.
Théorie nécessaire: Méthodes données aux cours 22 et 23
Déterminer la série de Taylor de $f(x)$ autour de a et son domaine de convergence.

i) $f(x) = e^{2x+1}$ avec $a = 0$, *ii)* $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ avec $a = 2$.

Exercice 7. (Limites)

Objectif: Trouver les limites donnée en utilisant les DL des foncions connus
Théorie nécessaire: Exemples vus aux cours 21 et 22
En utilisant des développements limités d'ordre convenable autour de 0, calculer les limites suivantes :

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}$ *ii)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \ln(1+x)}$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$ *iv)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(e^x - 2x)}{x^3}$

Exercice 8. (Séries de Mac-Laurin)

Objectif: Calculer les premiers termes de la série de Mac-Laurin des fonctions données.
Théorie nécessaire: Exemples des séries de Taylor et Mac-Laurin vus aux cours 21, 22
Trouver trois termes de la série de Mac-Laurin des fonctions suivantes :

i) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ *ii)* $f(x) = \tan(x)$

iii) $f(x) = \arctan(x)$ *iv)* $f(x) = \sqrt{1+\tan(x)}$

Exercice 9. (Etudes des fonctions)

Objectif: Etudier le comportement des fonctions utilisant les dérivées.
Théorie nécessaire: Propriété des fonctions discutées aux cours 20 et 21.
Etudier les fonctions suivantes et esquisser leurs graphes (points stationnaires, extremums, convexité, points d'inflexion, asymptotes) :

i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ *ii)* $f(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$

iii) $f(x) = \dfrac{x+2}{e^x}$.

Exercice 10. (V/F : Limites des quotients)

Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés concernant les limites des quotients des deux fonctions
Théorie nécessaire: Théorème de Bernoulli-L'Hospital et exemples donnée au cours 20
Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q1 : Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, alors $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Q2 : Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

Q3 : Si $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x)$, et la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.