Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger

T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) Betrachten Sie die komplexe Zahl

$$z = \left(\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^3 .$$

Dann gilt:

○ $\overline{z} = -2 - 2\mathrm{i}$ ○ $\overline{z} = -2 + 2\mathrm{i}$

○ $\overline{z} = 2 - 2\mathrm{i}$ ○ $\overline{z} = 2 + 2\mathrm{i}$

b) Eine beliebige surjektive Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ist immer auch injektiv.

○ richtig ○ falsch

c) Eine beliebige injektive Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ist immer auch surjektiv.

○ richtig ○ falsch

d) Ist f monoton fallend und beschränkt, so ist f injektiv.

○ richtig ○ falsch

e) Seien E, F, G, H nichtleere Mengen und $f : E \to F, g : G \to H$ zwei Funktionen mit $f(E) \subset G$. Wenn f und g surjektiv sind, dann ist die Komposition $g \circ f$ auch surjektiv.

○ richtig ○ falsch

f) Seien E, F, G, H nichtleere Mengen und $f : E \to F, g : G \to H$ zwei Funktionen mit $f(E) \subset G$. Wenn f und g injektiv sind, dann ist die Komposition $g \circ f$ auch injektiv.

○ richtig ○ falsch

g) Seien f und g zwei Funktionen gegeben durch

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2}] & \to &]0,1] \\ x & \to & \sin(x) \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1] & \to & [1,\infty[\\ x & \to & \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

Dann ist die Komposition $g \circ f$ bijektiv.

○ richtig ○ falsch

(A2) Komplexe Zahlen

(1) Lösen Sie nach $z \in \mathbb{C}$. Falls mehrere Lösungen existieren, geben Sie alle an.

a) $e^z = -3 - 2\mathrm{i}$

b) $3^z = 9$

c) $\cos z = \sqrt{2}$

d) $z^3 = 2e^{3+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

e) $(z + 3\mathrm{i})^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}$

(2) Gibt es jeweils ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^n$$

rein imaginär oder rein reell ist? Wenn ja geben Sie diese $n \in \mathbb{N}$ an.

(A3) Cosinus und Sinus

a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Reihendarstellung von $\mathrm{e}^x, \sin(x), \cos(x)$, dass gilt:

$$\sin(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}.$$

Hinweis: Hieraus folgt sofort die Darstellung des *Tangens*,

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x})}.$$

b) Verwenden Sie das Ergebnis aus a), um folgende Identitäten herzuleiten:

(i) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

(ii) $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

(A4) Hyperbolische Funktionen

Überprüfen Sie direkt mit der Darstellung

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

die folgende Identitäten für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

b) $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

c) $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

Hierbei bezeichnet tanh den *Tangens Hyperbolicus*, der, analog zum Tangens, definiert ist durch

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

(A5) Definitionsbereiche

Sei die Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit $E \subset \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{2 + x^4}.$$

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D(f) = E$ der Funktion f sowie das Bild $f(E)$.

b) Zeichnen Sie den Graphen von f (qualitativ).

c) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}([0, 5])$.

d) Seien $g(x) = \frac{1}{x-1}, \quad h(x) = x^2$.
Berechnen Sie die Verknüpfung $t(x) = (g \circ h \circ f)(x)$.

e) Sei zusätzlich die Funktion s gegeben durch $x \mapsto s(x) = e^x = \exp(x)$. Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D(f \circ s^{-1})$. Berechnen Sie anschliessend $(f \circ s^{-1})(x)$.

(A6) Injektivität und Surjektivität

Geben sei eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit $E \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie jeweils ob f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist und ausserdem die Infimum, Supremum, Minimum- oder Maximumsstellen. Tipp: Zeichnen Sie den Graph der Funktion, um eine bessere Vorstellung zu erhalten.

a) $f(x) = x^n, \qquad E = \mathbb{R}, \qquad$ für $n = 0, 1, 2, 3$

b) $f(x) = x^n, \qquad E =]0, 3], \qquad$ für $n = 0, 1, 2, 3$

c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad E = D(f),$

d) $f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad E = D(f),$