Analyse I — Série 14 (révision)

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 18.12.2024

Exercice 1.
Soient $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Vrai ou faux ?

(a) S'il existe $L > 0$ telle que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, alors f est continue.

(b) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.

(c) Soient a_n et b_n deux suites convergentes de limite ℓ_a et ℓ_b, respectivement, et satisfaisant $a_n < b_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors $\ell_a < \ell_b$.

(d) Si $f \circ g$ est continue en x_0, alors f est continue en x_0.

Exercice 2.
Résoudre les équations suivantes pour $z \in \mathbb{C}$:

(a) $z^2 = -8 + 6i$.

(b) $z^3 = 2 - 11i$.

(c) $e^z = i$.

(d) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Exercice 3.
Montrer les assertions suivantes par récurrence.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^5 - n$ est divisible par 5.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

Exercice 4.
Calculer les limites suivantes:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n e^{-n}$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(e^{-n})}{e^{-n}}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$

Exercice 5.
Calculer $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n$ pour $a_n = \sin(\frac{\pi}{2}n) + \cos(\frac{\pi}{2}n)$.

Exercice 6.
Etudier la convergence des suites définies par récurrence suivantes, et donner leur limite si elle existe.

(a) $a_0 = 1, a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{3} + 7$

(b) $a_0 = 1, a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{3a_n + 7}$

Exercice 7.
Etudier la convergence des séries suivantes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^3+1}{5n^3+3}$

Exercice 8.
Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[)$ avec $f(x) > 0$, $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = +\infty$ et telle que $\displaystyle\int_{0+}^{\infty} f(x)\,dx$ converge. Même question avec une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$.

Exercice 9.
Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions suivantes:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = (1+x)^3.$$

Exercice 10.
Etudier la continuité, la continuité à gauche/droite, la dérivabilité, et la dérivabilité à gauche/droite en $x = 3$ et $x = -1$ de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivante, en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2} & \text{si } x > 2 \text{ ou } x < -1 \\ \alpha & \text{si } x = 2 \\ \beta x - 4 & \text{si } -1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Exercice 11.
Calculer le développement limité d'ordre n des fonctions suivantes en $x_0 = 0$.

(a) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$; $n = 4$

(b) $e^{e^x} - 1$; $n = 3$.

(c) $\log\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$; $n = 4$.

Exercice 12.
Calculer les intégrales suivantes:

(a) $\displaystyle\int \frac{\log(t)}{(1+t)^2}\,dt.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{t^4+t^2}\,dt.$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{t^2+a^2}\,dt$ où $a > 0$.

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^3}\,dt.$