# Analyse I — Série 13

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 11.12.2024

**Exercice 1.**
Calculer les intégrales suivantes:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^5\,dx$

(b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \cos(\sqrt{x})\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^3 \log x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$

(f) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{x^2}\,dx$

(h) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$

(i) $\displaystyle\int x\arctan(2x)\,dx$

(j) $\displaystyle\int \log^3 x\,dx$

(k) $\displaystyle\int \tan^3(x)\,\cos(x)\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^6(x)}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^3(x)\cos(x)}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos(x)}\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)}\,dt$

(p) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1+t}}\,dt$

(q) $\displaystyle\int \frac{3y^2-4}{y^3-4y+7}\,dy$

**Exercice 2.**
Calculer les intégrales de fonctions rationnelles suivantes:

(a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x(x+1)^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx$

**Exercice 3.**
Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \le 1 \\ \dfrac{1}{r-1} & \text{si } r > 1. \end{cases}$

**Exercice 4.**
Étudier la convergence des intégrales suivantes, et les calculer si elles convergent.

(a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{(\cos x)^{1/3}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{0^+}^1 \log(x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^{5^-} \frac{1}{5-x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

**(f)**[1] $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

**Exercice 5.**
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de $f$ sur $[a,b]$. Vrai ou faux ?

(a) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors $f$ admet un zéro dans $[a,b]$.

(b) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$, alors $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

1. Difficile. Ici seule l'étude de la convergence est demandée.

(c) Si $f(x) < 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx < 0$.

(d) Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $F(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

(e) Pour tout $x \in [a, b]$, on a $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

**Exercice 6.**
En intégrant par parties, trouver une formule de récurrence pour $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Utiliser cette formule pour calculer

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^4}\,dx.$$

**Exercice 7.** *(Extension de $n!$)*
Pour $s \in \mathbb{R}_+$ on définit la fonction $f(s)$ par la formule

$$f(s) = \int_0^\infty x^s e^{-x}\,dx.$$

(a) Montrer que $f(s)$ est bien définie pour tout $s \geq 0$.

(b) Montrer que $f(0) = 1$.

(c) Montrer que $f(s) = s \cdot f(s-1)$ pour tout $s \geq 1$.

(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = n!$.

*Remarque: $f$ est donc un prolongement de la factorielle $n!$ pour des valeurs non-entières! En fait, $f(s) = \Gamma(s+1)$, où $\Gamma$ dénote la fonction Gamma.*