Analyse avancée 1
Mathématiques 1ère année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 9.2 – jeudi 14 novembre 2024

La série d'aujourd'hui consiste en une étude guidée des fonctions convexes. C'est une classe de fonctions importante dont il faut connaître les principales propriétés. Leur étude permet de manipuler de nombreux concepts du cours. C'est aussi l'occasion de réfléchir à un long problème sur un thème unique, ce qui est plus représentatif de la pratique mathématique que de courts exercices indépendants.

Définition (Fonction convexe)**.** *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite* convexe *ssi pour tout couple d'éléments a, b de I et tout nombre réel $\lambda \in [0, 1]$, on a :*

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \tag{1}$$

On dit que f est concave *ssi $-f$ est convexe.*

Ainsi, une fonction est convexe ssi son graphe est toujours en-dessous de ses cordes.

Exercice 1. *Quelques premiers exemples de fonctions convexes.*

1. Montrer que les fonctions constantes, identité ($x \mapsto x$) et valeur absolue sont convexes sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont convexes et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ alors $\alpha f + \beta g$ est convexe.

Exercice 2. *Taux d'accroissement des fonctions convexes (faire un dessin!).*

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a, b \in I$ tels que $a < b$ et soit $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$ avec $\lambda \in]0, 1[$. On note $p(AB) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ la pente de la corde du graphe de f reliant $A = (a, f(a))$ à $B = (b, f(b))$ et de même $p(AC)$, et $p(CB)$. Montrer, que *chacune* des inégalités suivantes est équivalente à l'inégalité de convexité pour f (on pourra se contenter d'en prouver une seule) :

$$p(AC) \leq p(CB), \qquad p(AC) \leq p(AB), \qquad p(AB) \leq p(CB).$$

2. En déduire la propriété suivante: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On note $\tau_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ l'application *taux d'accroissement* en a définie par

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Alors f est convexe ssi pour tout $a \in I$, τ_a est une fonction croissante sur $I \setminus \{a\}$.

3. [**À rendre**] Montrer que si f est convexe et $a < b < c$ alors f est dérivable à droite et à gauche en b et

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b) \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

4. Montrer que si f est convexe sur un intervalle I, alors f est continue sur $\mathring{I}$, où $\mathring{I}$ désigne l'intérieur de I (c'est à dire I privé de ses bornes).

Exercice 3. *Convexité et dérivabilité.*

Montrer les résultats suivants:

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I intervalle ouvert. f est convexe ssi f' est croissante sur I. *Indications:* Pour $\Longrightarrow$: utiliser la conclusion de l'exercice 2.3. Pour $\Longleftarrow$: utiliser le TAF et penser aux inégalités de l'exercice 2.1.

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I intervalle ouvert. f est convexe ssi $f'' \geq 0$ sur I.

3. Montrer que les fonctions suivantes sont convexes: $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions suivantes sont concaves sur $\mathbb{R}_+^*$: $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \log(x)$ (grâce à notre travail précédent, cette question est simple; mais il est utile de se rappeler que ces fonctions sont convexes ou concaves).

Exercice 4. *Une expression directe de la dérivée seconde (cet exercice est indépendant des autres).*

1. Utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour démontrer que si $f \in C^2(\mathbb{R})$ et si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

2. En déduire que si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est convexe alors $f'' \geq 0$ (on retrouve partiellement ce que l'on a obtenu à l'exercice 3.2)

Épilogue: pourquoi est-ce que la convexité est une propriété importante?

Les fonctions convexes jouent un rôle important dans la théorie de l'optimisation. Dans un problème d'optimisation, on cherche à trouver le minimum (ou le maximum) d'une fonction. Énormément d'objets d'intérêt en mathématiques, sciences, et ingénierie peuvent être décrits comme des solutions d'un problème d'optimisation, par exemple :

- les droites, ou plus généralement les géodésiques (minimisantes) en géométrie Riemannienne sont des courbes de longueur *minimale*;
- les états stationnaires d'un système physique *maximisent* l'entropie, sous certaines contraintes;
- les trajectoires des sondes spatiales *minimisent* la consommation de carburant, les programmes d'IA *minimisent* une mesure d'erreur sur un jeu de donnée d'entrainement, etc.

Parmi tous les problèmes d'optimisation, ceux dont la fonction à minimiser est convexe sont ceux qui se prêtent le mieux à l'optimisation; en particulier parce qu'il satisfont la propriété suivante:

Proposition 0.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et convexe. On a*

$$f \text{ atteint un minimum global en } x \in I \iff f'(x) = 0$$

qui découle de l'Exercice 2.3, qui montre que $f(x) \leq f(y) + (x-y)f'(x)$, $\forall x, y \in I$.

C'est à dire qu'une propriété locale (à droite) garantit l'optimalité globale (à gauche). Cette propriété est très pratique aussi bien d'un point de vue théorique – pour étudier les propriétés du minimum – que d'un point de vue algorithmique – pour trouver ce minimum efficacement.