Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 8.2 – jeudi 7 novembre 2024

Exercice 1. *Objectif: démontrer la chain rule, manipuler les $o(\cdot)$.*

Démontrer le résultat suivant (du cours): Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles, $a \in I$, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.
Indication: on pourra composer les expressions de la forme "approximation affine"+ "reste" qui découlent des hypothèses de dérivabilité.

Exercice 2. *Objectif: étudier la dérivabilité d'une fonction.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0 et nulle part ailleurs.

Exercice 3. *Objectif: étudier la dérivabilité d'une fonction.*

Déterminer quand la dérivée existe, et le cas échéant la calculer, pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans les deux situations suivantes:

(i) $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$,

(ii) **[À rendre]** $f(x) = x^2\lfloor x \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \,;\, k \leq x\}$ dénote la partie entière de x.

Exercice 4. *Objectif: bien comprendre la définition de la dérivée.*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Vérifier que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Réciproquement, si f est continue en a, l'existence de cette limite entraîne-t-elle celle de $f'(a)$?

Exercice 5. (*) *Objectif: s'entraîner au calcul de dérivées.*

Montrer que arctan est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\arctan^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\big(n \arctan(1/x)\big).$$