Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 7.1 – mardi 29 octobre 2024

Exercice 1. *Résolution guidée d'une équation fonctionnelle classique.*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en a telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Montrer que la fonction f est continue partout. En déduire que f est linéaire; plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = xf(1).$$

Indications:
1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que f est continue en $x = 0$.
3. Montrer que f est continue partout.
4. Montrer que $f(n) = nf(1), \forall n \in \mathbb{Z}$..
5. Montrer que $f(x) = xf(1), \forall x \in \mathbb{Q}$., puis conclure.

Exercice 2. *S'habituer à imaginer des exemples pour enrichir son intuition.*

On a vu que si $I \subset \mathbb{R}$ est un segment (intervalle fermé borné) et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, alors $f(I)$ est un segment. En revanche pour tout autre type d'intervalle, $f(I)$ peut être un intervalle de n'importe quel type a priori (ouvert, fermé, semi-ouvert, borné, non-borné, etc). Par exemple: trouver un exemple de fonction f continue sur un intervalle semi-ouvert borné telle que $f(I)$ est un intervalle ouvert.

Exercice 3. *Autour du théorème des valeurs intermédiaires.*

1. Montrer que l'équation $x^5 - 3x = 1$ a au moins une racine réelle a avec $1 < a < 2$.
2. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue, montrer qu'il existe $\bar{x} \in [a, b]$ t.q. $f(\bar{x}) = \bar{x}$. (Un tel résultat, est appelé un “théorème de point fixe”, il y en a des myriades, avec diverses hypothèses).
3. (*) Montrer (en posant le modèle mathématique adéquat) qu'à chaque instant, sur terre, il existe 2 points antipodaux où la température est la même.

Exercice 4 (*). *Démonstration du* théorème de la bijection monotone *(cours).*

Montrer le résultat suivant: Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ des intervalles non-vides et $f : I \to J$ une fonction surjective et strictement monotone. Alors
1. f est continue ;
2. f admet une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ continue et strictement monotone.

Exercice 5. *Et quelques calculs pour ne pas perdre la main et finir en douceur.*
Calculer les limites ou séries suivantes:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n-1)}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+10}$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!$.