Analyse avancée 1
Mathématiques 1ère année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 3.1 – mardi 24 septembre 2024

Exercice 0. *Objectif: Échauffement.*

Montrer que toute suite réelle convergente est bornée.

Exercice 1. *Objectif: Familiarisation avec la notion de suite divergente.*

1. Écrire la propriété "la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge" en termes des quantificateurs $\forall, \exists$.
2. Démontrer que si x_n est défini par $x_n = \cos(n)$, $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est divergente.
   Indication: Faire une démonstration par l'absurde en utilisant les relations
   $$\cos(n+2) = \cos(n) - 2\sin(1)\sin(n+1) \quad \text{et} \quad \sin(n+2) = \sin(n) + 2\sin(1)\cos(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2. *Objectif: appliquer un critère de convergence des suites.*

Montrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ définie par $x_0 = 1$ et
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{2}\sin(2x_n)\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
converge et calculer sa limite. On pourra utiliser le résultat admis que si (u_n) est une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n\to\infty} \sin(u_n) = \sin(\ell)$ (continuité de la fonction sin sur $\mathbb{R}$, cf. plus loin dans le cours).

Indications:

1. *Utiliser la relation* $|\sin(t)| < t, \forall t > 0$ *pour montrer que* $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. *Montrer que la suite* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *est décroissante et bornée inférieurement.*

Exercice 3. *Objectif: démontrer un résultat utile de convergence de suite (vous pourrez vous en servir dans la suite du cours)*

Démontrer le **Théorème des suites adjacentes:** Soient $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite croissante et $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite décroissante telles que $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ (on dit que (u_n) et (v_n) sont *adjacentes*). Alors, on a:

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1} \leq \cdots \leq y_0$.
2. Ces deux suites convergent et $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Exercice 4(*). *Objectif: un résultat important de convergence, plus subtil, appelé "Thm. de Césaro".*

1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par
   $$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
   Montrer que si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $v_n \to \ell$ quand $n \to \infty$.
   Indication: revenir à la définition de convergence d'une suite et "manipuler les ϵ*"*
2. Pour montrer que la réciproque est fausse, trouver un exemple de suite (u_n) divergente qui est telle que (v_n) converge.