Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 11.2 – jeudi 28 novembre 2024

Il n'y a pas d'exercice à rendre car cette série est plutôt calculatoire, avec peu de subtilités de rédaction. Cette série est plutôt courte, profitez du temps dégagé pour vous préparer à l'examen blanc!

Exercice 1. *Échauffement: démonstration des comparaisons asymptotiques.*

Pour $\alpha > 0$, $a > 1$, étudiez les limites suivantes (qu'on pourra ensuite utiliser sans justification):

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha}$
3. $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log(x)$
4. $\lim_{x\to-\infty} a^x |x|^\alpha$

Exercice 2. *Propriété de morphisme de groupes de* $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ *de l'exponentielle.*

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ en manipulant le produit des séries (cf. série 11.1, ex. 1.2).
Remarque: cette démonstration s'applique sans changement au cas où x et y sont des nombres complexes. En revanche cette propriété n'est plus vraie en général pour le cas où x et y sont des matrices carrées, à cause de la non-commutativité du produit matriciel.

Exercice 3. *Fonctions lisses (C^∞) non-analytiques.*

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que toutes les dérivées de f existent en $x = 0$ et s'annulent. En conclure que f n'est pas analytique au voisinage de 0.
   Indications:
   (a) Commencer par montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.
   (b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que
   $$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{p_n(x)}{x^{2n}} \exp(-1/x), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$
   où p_n est un polynôme, puis conclure.
2. (*) Trouver une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, telle que $g(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $g(x) = 1$ pour $x \geq 1$.

N.B: La définition de f ici diffère de l'exemple de fonction non-analytique donné en cours; mais le résultat mentionné en cours est vrai aussi. Les *fonctions de transition lisses* telles que celle construite au point 2 sont utiles dans de nombreux contextes, pour “sélectionner” de façon lisse un sous-ensemble (ici $[1, +\infty[\subset \mathbb{R}$). On peut montrer qu'il est impossible de trouver une telle fonction qui soit partout analytique.

Exercice 4. *Se familiariser avec les fonctions hyperboliques réciproques.*
On rappelle que cosh et sinh sont les parties paires et impaires de exp respectivement, et $\tanh = \sinh / \cosh$. Sur l'intervalle où ces fonctions sont strictement croissantes, on définit leurs fonctions réciproques acosh, asinh, et atanh.

1. Exprimer acosh et atanh à l'aide des fonctions élémentaires telles que le logarithme et la racine.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{atanh}(x) = \operatorname{acosh}(1/x)$.