Analyse avancée 1
Mathématiques 1ère année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 10.2 – jeudi 21 novembre 2024

Exercice 1. *Bien comprendre la notion de rayon de convergence d'une série entière.*

1. **[À rendre]** Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que
$$R = \sup\{|x| \; ; \; (a_n x^n) \text{ bornée}\}.$$
(On pourra utiliser ce résultat pour la suite de l'exercice.)
2. Montrer que si une série entière $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ est telle qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $m \leq |a_k| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors son rayon de convergence est 1.
3. Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$, telle que $a_n > 0$ pour tout entier n et soit $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n^\alpha x^n$?

Exercice 2. *S'entraîner au calcul du rayon de convergence de séries entières.*

Trouver le rayon de convergence de ces séries entières:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{3n}}{n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \sin(1/n)) x^n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - 1) x^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}} x^n$, $a > 0$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log(n)} x^n$

Exercice 3. *Convergence normale et convergence uniforme des séries de fonctions*

1. On dit qu'une suite de fonctions réelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ est *uniformément de Cauchy* ssi
$$\forall \epsilon > 0, \; \exists N \in \mathbb{N}, \; \forall p, q \geq N \text{ et } x \in D, \; |f_p(x) - f_q(x)| \leq \epsilon.$$
Montrer que (f_n) converge uniformément sur D ssi (f_n) est uniformément de Cauchy sur D.
2. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et on suppose qu'il existe une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $|f_k(x)| \leq a_k$ pour tout $x \in I$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrez que si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, alors la série de fonctions $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge *uniformément* sur I.
Indication: montrer que la suite des sommes partielles de la série est uniformément de Cauchy.
3. Quand une série de fonctions satisfait les hypothèses de la question 2, on dit qu'elle converge *normalement*. On a donc montré que la convergence normale implique la convergence uniforme. La réciproque est-elle vraie? Si oui, le montrer, si non, donner un contre-exemple.
4. Montrer que la série de fonctions $x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + x^4}{k^4 + x^2}$ converge vers une fonction continue.

Exercice 4. *Un peu de révision sur les dérivées...*

L'objectif de cet exercice est de montrer la version unidimensionnelle du Theorème d'inversion locale, un résultat fondamental d'analyse.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, et soit $x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est *localement bijective* dans x, c.-à-d. qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x tel que t.q. $f|_I : I \to f(I)$ est bijective. En outre, montrer que $f^{-1} \in C^1(f(I))$.
2. Trouver une fonction f t.q. la dérivée f' existe et t.q. $f'(x) \neq 0$ mais f n'est pas localement bijective dans x.
Indication: pensez au théorème de la continuité de la dérivée pour guider votre imagination.