ANALYSE I TEST BLANC

6 DÉCEMBRE 2018

Nom e prénom:________________________________ SCIPER: ______________

- Matériel autorisé: aucun (pas de polycopié, pas de calculatrice)
- Les problèmes sont ordonnés par ordre croissant de difficulté. Le dernier problème est difficile.
- Vous pouvez utiliser, sans les reprouver, des résultats vus en cours ou dans le polycopié. Néanmoins, vous ne pouvez pas faire référence aux exercices du cours: si un problème ressemble à un problème vu en exercices, refaites-le simplement.
- Vous avez 12 problèmes, chaque problème vaut 7 points. Pour les questions vrai/faux, un point pour la bonne réponse, 6 points pour la preuve (si vrai) ou le contre-exemple (si faux).
- Vous pouvez écrire sur des feuilles de brouillon, mais les réponses qui seront corrigées devront figurer sur les feuilles.

---

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $x \in \mathbb{R}$. Alors la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_n = f\left(x + 2^{-n}\right)$ est de Cauchy.

Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.

(2) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est une série convergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^{n^2}$ est une série convergente.

Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.

(3) Soit une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ avec $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si pour tout $m \geq 1$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+m}}{x_n} = 1$ alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.

Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.

(4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on a que f est lipschitzienne sur $[a, b]$. Alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.

(5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Et soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = \alpha \in [a,b]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 0$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} (f'(x))^n$ est convergente pour tout $x \in [a,b]$, montrez que x_n est convergente.

(6) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soient $a < c < b$ tels que

$$\frac{f(b) - f(c)}{f(c) - f(a)} < 0.$$

Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) = 0$.

Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.

(7) Soient $f, g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = 0.$$

Alors si f est uniformément continue, g est aussi uniformément continue.

Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.

(8) Si $(a_{k,n})_{n \geq 0}$ est une suite bornée de nombres réels pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\limsup_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} a_{k,n} = \limsup_{n \to \infty} \limsup_{k \to \infty} a_{k,n}.$$

Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.

(9) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) \geq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ est convergente.

Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.

(10) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ et $a < b$ tels que $f''(a) = f''(b) = 0$ et $f''''(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors f est concave sur $[a, b]$.

Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.

(11) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2n) = 2n$ et $f(2n+1) = 2n+2$. Montrez que $f''(x)$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$.

(12) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\sum_{n=2}^{\infty} f\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ converge. Alors toutes les dérivées de f s'annulent en 0.

Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.